# ＜ 母等式Ⅰ(分子-1 乗)と母等式Ⅰ(分子-3 乗)の導出 ＞

**ゼータ香り式分割母等式Ⅰ**

$\cos x/(1^2+a^2)-3\cos3x/(3^2+a^2)+5\cos5x/(5^2+a^2)-7\cos7x/(7^2+a^2)+\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(ax)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---①

$(-\pi/2<x<\pi/2)$

ここで、a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

（その２５８）の④で見た上記ゼータ香り式分割母等式Ⅰ（1-1/3+1/5-1/7+・・の親戚）に関し、分子がマイナスの累乗（指数）のタイプの式が出たので、紹介したい。

結果から示す。以下の分子”-1”乗型と分子”-3”乗型が出た。なお、ch, sh は、双曲線関数 cosh, sinh を略記したものである。

************************************************************

**ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分子-1 乗型)**

$1^{-1}\cos x/(1^2+a^2)-3^{-1}\cos3x/(3^2+a^2)+5^{-1}\cos5x/(5^2+a^2)-7^{-1}\cos7x/(7^2+a^2)+\cdots$

$=(\pi/(4a^2))(1-\mathrm{ch}(ax)/\mathrm{ch}(a\pi/2))$ ---②

$(-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2)$

**ゼータ香り式分割母等式Ⅰ（分子-3 乗型）**

$1^{-3}\cos x/(1^2+a^2)-3^{-3}\cos3x/(3^2+a^2)+5^{-3}\cos5x/(5^2+a^2)-7^{-3}\cos7x/(7^2+a^2)+\cdots$

$=(\pi/(4a^2))\{(1/2)(\pi^2/4-x^2)-(1/a^2)(1-\mathrm{ch}(ax)/\mathrm{ch}(a\pi/2))\}$ ---③

$(-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2)$

************************************************************

このようなものである。より形を明確にしたいために、$1^{-1}$ とか $1^{-3}$ などと表記した。　例えば、なぜ②では、$\cos x/(1(1^2+a^2))-\cos3x/(3(3^2+a^2))+\cdots$ ではなく、$1^{-1}\cos x/(1^2+a^2)-3^{-1}\cos3x/(3^2+a^2)+\cdots$ などと表現したかというと、それはゼータ $1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+\cdots$ を意識したいからである。

何パターンかのパラメータで Excel の数値計算も行ったが、②、③は正しいものであった。

また①の定義域は $(-\pi/2<x<\pi/2)$ だが、②、③は $(-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2)$ となった点にも着目したい。

導出はとても簡単なので詳細は略すが、流れだけ示すと以下の通り。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の流れ＞

$1^{-1}\cos x/(1^2+a^2)-3^{-1}\cos3x/(3^2+a^2)+\cdots$

を

$\cos x/(1(1^2+a^2))-\cos3x/(3(3^2+a^2))+\cdots$

と変形し、それを

$\cos x/(1(1^2+a^2))-\cos3x/(3(3^2+a^2))+\cdots$

$=(1/a^2)\{(\cos x/1-\cos3x/3+\cdots)+(1\cos x/(1^2+a^2)-3\cos3x/(3^2+a^2)+\cdots)\}$

とする。

上式最後の前の（）は既知のフーリエ級数、後の（）は①（これも既知のフーリエ級数）である。それらを使うことで②が得られる。③も同様にしてでるが、既知のフーリエ級数と②（今度は②を使う）を利用して得られる。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして簡単に得られた。

① ～③を並べて眺めよう。

*************************************************************

**ゼータ香り式分割母等式Ⅰ**

$\cos x/(1^2+a^2) - 3\cos 3x/(3^2+a^2) + 5\cos 5x/(5^2+a^2) - 7\cos 7x/(7^2+a^2) + \cdots = (\pi/4)\mathrm{ch}(ax)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---①

$(-\pi/2 < x < \pi/2)$

**ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分子-1 乗型)**

$1^{-1}\cos x/(1^2+a^2) - 3^{-1}\cos 3x/(3^2+a^2) + 5^{-1}\cos 5x/(5^2+a^2) - 7^{-1}\cos 7x/(7^2+a^2) + \cdots$

$= (\pi/(4a^2))(1-\mathrm{ch}(ax)/\mathrm{ch}(a\pi/2))$ ---②

$(-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$

**ゼータ香り式分割母等式Ⅰ（分子-3 乗型）**

$1^{-3}\cos x/(1^2+a^2) - 3^{-3}\cos 3x/(3^2+a^2) + 5^{-3}\cos 5x/(5^2+a^2) - 7^{-3}\cos 7x/(7^2+a^2) + \cdots$

$= (\pi/(4a^2))\{(1/2)(\pi^2/4-x^2) - (1/a^2)(1-\mathrm{ch}(ax)/\mathrm{ch}(a\pi/2))\}$ ---③

$(-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$

*************************************************************

並べると、このようになる。

上の①を眺めていて、分子は 1 乗の形だが、マイナスの累乗の形(-1 乗、-3 乗、-5 乗・・)もあるのではないか？と思い、今回計算を遂行したのであった。

もっと難しい計算になるかと思ったが、簡単であった。②と③は、本質的に同じものということができるだろう。-5 乗、-7 乗・・も原理的に可能であるが、それはやめておく。

a->0 をすると、以下のゼータになるということが非常に大事なことであり、①～③ではそれを強く意識したい。

① $\Rightarrow 1-1/3+1/5-1/7+\cdots$

② $\Rightarrow 1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+\cdots$

③ $\Rightarrow 1-1/3^5+1/5^5-1/7^5+\cdots$

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●今回のことが分かって、すぐに思ったのは、次の分母４乗型のものでのマイナスの累乗（指数）も出るのではないか？ということである。マイナス方向に沈み込んでいるのでは？

## ゼータ香り式分割母等式Ｉ（分母４乗-A 型）

$1\cos x/(1^4+4a^4)-3\cos 3x/(3^4+4a^4)+5\cos 5x/(5^4+4a^4)-7\cos 7x/(7^4+4a^4)+\cdots$

$=(\pi/(8a^2))\{\sin(a(\pi/2+x))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))+\mathrm{sh}(a(\pi/2+x))\sin(a(\pi/2-x))\}/\{\mathrm{ch}(a\pi)+\cos(a\pi)\}$ ---①

$(-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2)$

ここで、a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

すなわち、次が出ないか？ということである。

$1^{-1}\cos x/(1^4+4a^4)-3^{-1}\cos 3x/(3^4+4a^4)+5^{-1}\cos 5x/(5^4+4a^4)-7^{-1}\cos 7x/(7^4+4a^4)+\cdots$

$1^{-3}\cos x/(1^4+4a^4)-3^{-3}\cos 3x/(3^4+4a^4)+5^{-3}\cos 5x/(5^4+4a^4)-7^{-3}\cos 7x/(7^4+4a^4)+\cdots$

いまちょっと調べると、これもたぶん出る。

ゼータ香り式の母等式は、分子がマイナスの指数（累乗）の方向にも延びているようである。
地上世界はちょっと顔を出しているだけだが、地下世界は無限に続いている気がする。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.10.23 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）