＜ 新種の関数 S_Ax, C_Ax, S_Bx, C_Bx の定義、加法定理など＞

ゼータ香り式の母等式(フーリエ級数)を扱っていると、sinx・shx や cosx・chx また sinx・chx や cosx・shx などの形がよく出現する。そのため、これらをそれぞれ独立の新関数として定義したい欲望にかられる。調べたところ、三角関数や双曲線あるいは楕円関数にすこし似たような規則が出た。今回は、新種の関数の定義と加法定理などの公式を紹介する。

得られた公式は、ある意味で実験的なものなので、今後よい道具となっていくかどうかはわからない。ただし、正しいものであることには違いない（将来、改良もあり得る)。

次のように四つの関数を新たに定義した。

$S_Ax = \sin x \cdot \mathrm{sh}x$, $C_Ax = \cos x \cdot \mathrm{ch}x$, $S_Bx = \sin x \cdot \mathrm{ch}x$, $C_Bx = \cos x \cdot \mathrm{sh}x$

なお、“S_Ax”は“$S_A(x)$”の意味である。また sh, ch はそれぞれ sinh, cosh を略したものである。

サインのような関数が二つ（S_A、S_B)、コサインのような関数が二つ（C_A、C_B）もあってちょっと複雑に見えるかもしれない。しかし、これが割合きれいな規則を成している。

以下、分かった事実を列挙する。定義から書いていく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜四つの関数の定義＞

$S_Ax = \sin x \cdot \mathrm{sh}x$

$C_Ax = \cos x \cdot \mathrm{ch}x$

$S_Bx = \sin x \cdot \mathrm{ch}x$

$C_Bx = \cos x \cdot \mathrm{sh}x$

＜２乗の加減＝１の公式＞

$C_A^2x - S_A^2x - (C_B^2x - S_B^2x) = 1$　　注記：わざわざ括弧（ ）をつけたのはその方が覚えやすいため。ただそれだけである。

＜２倍角の公式＞

$S_A2x = 4S_Ax \cdot C_Ax = 4S_Bx \cdot C_Bx$

$C_A2x = C_A^2x - S_A^2x + (C_B^2x - S_B^2x) = 2(C_A^2x - S_A^2x) - 1 = 2(C_B^2x - S_B^2x) + 1$

$S_B2x = 2S_Ax \cdot C_Bx + 2C_Ax \cdot S_Bx$

$C_B2x = 2C_Ax \cdot C_Bx - 2S_Ax \cdot S_Bx$

＜加法定理＞

$S_A(x+y) = S_Ax \cdot C_Ay + C_Ax \cdot S_Ay + S_Bx \cdot C_By + C_Bx \cdot S_By$

$S_A(x-y) = S_Ax \cdot C_Ay + C_Ax \cdot S_Ay - (S_Bx \cdot C_By + C_Bx \cdot S_By)$

$C_A(x+y) = C_Ax \cdot C_Ay - S_Ax \cdot S_Ay + C_Bx \cdot C_By - S_Bx \cdot S_By$

$C_A(x-y) = C_Ax \cdot C_Ay - S_Ax \cdot S_Ay - (C_Bx \cdot C_By - S_Bx \cdot S_By)$

$S_B(x+y)=S_Bx\cdot C_Ay+C_Bx\cdot S_Ay+S_Ax\cdot C_By+C_Ax\cdot S_By$
$S_B(x-y)=S_Bx\cdot C_Ay+C_Bx\cdot S_Ay-(S_Ax\cdot C_By+C_Ax\cdot S_By)$

$C_B(x+y)=C_Bx\cdot C_Ay-S_Bx\cdot S_Ay+C_Ax\cdot C_By-S_Ax\cdot S_By$
$C_B(x-y)=C_Bx\cdot C_Ay-S_Bx\cdot S_Ay-(C_Ax\cdot C_By-S_Ax\cdot S_By)$

＜xが０のときの値＞

$S_A0=0$,　$C_A0=1$,　$S_B0=0$,　$C_B0=0$

＜xを ix で置き換えた場合（i：虚数単位）＞

$S_Aix=-S_Ax$,　$C_Aix=C_Ax$,　$S_Bix=iC_Bx$,　$C_Bix=iS_Bx$

＜微分＞

$(S_Ax)'=C_Bx+S_Bx$,　$(C_Ax)'=C_Bx-S_Bx$,　$(S_Bx)'=C_Ax+S_Ax$,　$(C_Bx)'=C_Ax-S_Ax$

$(S_Ax)''=2C_Ax$,　$(C_Ax)''=-2S_Ax$,　$(S_Bx)''=2C_Bx$,　$(C_Bx)''=-2S_Bx$

＜負の偏角の関係＞

$S_A(-x)=S_Ax$,　$C_A(-x)=C_Ax$,　$S_B(-x)=-S_Bx$,　$C_B(-x)=-C_Bx$,

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　このようになった。三角関数や双曲線関数ほどの簡明さはないが、しかし三角関数と双曲線関数をミックスしたようなきれいな規則から成っている。

　[加法定理]は、[四重積-二重積]対称式（１６個の式のうちの八つ）を利用すれば簡単に出る。以下に使った対称式を二つだけ示した。[２倍角の公式]は、加法定理の x+y の方で y を x とすれば出る。[２乗の加減＝１の公式]は、$C_A(x-y)$加法定理で $C_A(x-x)$として $C_A0=1$ から出る。

　[x を ix で置き換えた場合]は、sinix＝ishx, shix＝isinx, cosix＝chx, chix＝cosx の関係から出る。

　[微分]の結果も、三角関数と双曲線関数の微分を用いれば簡単である。２回微分(″) した結果が興味深い。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[四重積-二重積]対称式Ⅰ

対称式Ⅰ(3)

$\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y+\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x+y)-\mathrm{sh}(x-y)\cdot \sin(x-y)\}/2$

対称式Ⅰ(4)

$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y+\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x+y)+\mathrm{sh}(x-y)\cdot \sin(x-y)\}/2$

ここで、x,y は任意の実数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****

● 微分した結果が気になる。さらに微分したらどうなるのか？ ４回微分したら次となった。

$$(S_Ax)''''=-4S_Ax,\quad (C_Ax)''''=-4C_Ax,\quad (S_Bx)''''=-4S_Bx,\quad (C_Bx)''''=-4C_Bx$$

全部同じ形となった！

“-4”を別にすれば関数 S_Ax, C_Ax, S_Bx, C_Bx は４回微分すれば元に戻るとわかった。この結果から、四関数は次の微分方程式の解となっている。

$$y'''' +4y=0$$

この微分方程式によって四関数が規定されているともいえるかもしれない。ちなみに sinx, cosx は、$y'' +y=0$ の解であり、shx, chx は $y'' -y=0$ の解である。

役に立つかどうかは別にして、関数 S_Ax, C_Ax, S_Bx, C_Bx がよい性質をもっていることは確実と感じる。

●今回の関数は、なんらかの積分の逆関数という形で定義できるだろうか。

sinx は、$y=\int_{(0\sim x)}1/\sqrt{(1-x^2)}\,dx$ の逆関数として定義される。つまり $y=\int_{(0\sim x)}1/\sqrt{(1-x^2)}\,dx=\sin^{-1}x$ となっている。

また楕円関数の一種のレムニスケート関数は $y=\int_{(0\sim x)}1/\sqrt{(1-x^4)}\,dx$ の逆関数として定義される。ガウスは、それを sin. lemn.（レムニスケート的サイン）や sl と手記に記している。すなわち、$y=\int_{(0\sim x)}1/\sqrt{(1-x^4)}\,dx=\mathrm{sl}^{-1}x$ である。

今回の関数が、それらと類似のことになっているか？という問いである。

****

2022.10.16 杉岡幹生

参考文献

・「近世数学史談」（高木貞治著、共立出版）

・「数学のたのしみ 2005 春号　楕円曲線：その魅惑の世界」（日本評論社）