＜ 母等式Ⅰ(分母８乗-A 型,B 型)フーリエ級数 ＞

前回、示唆しただけに終わったゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分母８乗)のＡ型、Ｂ型を、今回示すことにする。以下のものである。なお、sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ（分母８乗-A 型）

$$1\cos x/(1^8+16a^8)\ -3\cos 3x/(3^8+16a^8)\ +5\cos 5x/(5^8+16a^8)\ -7\cos 7x/(7^8+16a^8)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi\sqrt{2}/(64a^6))\{(K+L)P(x)\ +(-K+L)Q(x)\}/(K^2+L^2)\quad\text{---①}$$

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ（分母８乗-B 型）

$$1^5\cos x/(1^8+16a^8)\ -3^5\cos 3x/(3^8+16a^8)\ +5^5\cos 5x/(5^8+16a^8)\ -7^5\cos 7x/(7^8+16a^8)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi\sqrt{2}/(16a^2))\ \{(K-L)P(x)\ +(K+L)Q(x)\}/(K^2+L^2)\quad\text{---②}$$

$(-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2)$

ここで、a, α, β, K, L, P(x), Q(x)は以下の通り。

a は任意の実数（0 の場合 a->0)。$\alpha=(a/2)\cos(\pi/8)$, $\beta=(a/2)\sin(\pi/8)$

$K=\mathrm{ch}(2\pi\alpha)\cos(2\pi\beta)+\cos(2\pi\alpha)\mathrm{ch}(2\pi\beta)$, $L=\mathrm{sh}(2\pi\alpha)\sin(2\pi\beta)-\sin(2\pi\alpha)\mathrm{sh}(2\pi\beta)$

$$\begin{aligned}P(x)=&\sin(\pi\alpha+2\alpha x)\mathrm{sh}(\pi\alpha-2\alpha x)\cos(\pi\beta-2\beta x)\mathrm{ch}(\pi\beta+2\beta x)\\&+\mathrm{sh}(\pi\alpha+2\alpha x)\sin(\pi\alpha-2\alpha x)\mathrm{ch}(\pi\beta-2\beta x)\cos(\pi\beta+2\beta x)\\&-\mathrm{ch}(\pi\alpha+2\alpha x)\cos(\pi\alpha-2\alpha x)\mathrm{sh}(\pi\beta-2\beta x)\sin(\pi\beta+2\beta x)\\&-\cos(\pi\alpha+2\alpha x)\mathrm{ch}(\pi\alpha-2\alpha x)\sin(\pi\beta-2\beta x)\mathrm{sh}(\pi\beta+2\beta x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(x)=&\sin(\pi\beta-2\beta x)\mathrm{ch}(\pi\beta+2\beta x)\mathrm{ch}(\pi\alpha-2\alpha x)\sin(\pi\alpha+2\alpha x)\\&+\mathrm{ch}(\pi\beta-2\beta x)\sin(\pi\beta+2\beta x)\sin(\pi\alpha-2\alpha x)\mathrm{ch}(\pi\alpha+2\alpha x)\\&+\cos(\pi\beta-2\beta x)\mathrm{sh}(\pi\beta+2\beta x)\mathrm{sh}(\pi\alpha-2\alpha x)\cos(\pi\alpha+2\alpha x)\\&+\mathrm{sh}(\pi\beta-2\beta x)\cos(\pi\beta+2\beta x)\cos(\pi\alpha-2\alpha x)\mathrm{sh}(\pi\alpha+2\alpha x)\end{aligned}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようになった。一見して右辺は複雑に見えるが、P(x), Q(x)は円環的な美しい秩序を成している。現時点ではこれ以上は簡単にならないのではないかと思っているが、まだわからない。

母等式Ⅰ(分母４乗-A 型)に虚数マジックを適用して導いたが、大変な計算量となった。
その方法は、(その２５８) の母等式Ⅰ(分母４乗型)を虚数マジックで導いたのと本質的に同等なので導出法は略す。Excel で数値検証も行ったが、正しいものであった。

導出の過程で、１６個の[四重積-二重積]対称式のうち９個の公式を使った。例えば、P(x)を導くのに以下の四つを使っている。

****

[四重積-二重積]対称式

対称式Ⅰ(1)

$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x-y) + \mathrm{sh}(x+y)\cdot \sin(x-y)\}/2$

対称式Ⅰ(2)

$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y - \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x-y) - \mathrm{sh}(x+y)\cdot \sin(x-y)\}/2$

対称式Ⅱ(1)

$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y + \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\cos(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot \cos(x+y)\}/2$

対称式Ⅱ(2)

$\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y + \sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\cos(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\cdot \cos(x+y)\}/2$

****

これらは美しく、そして本質的に重要である。

ゼータ香り式を扱っていると、これらを使う場面が頻繁に現れる。四重積ペアが現れては公式で二重積に変換していっている。この公式を知らなかったために４年前はギブアップ状態であった。上式を含む１６式を発見してから、分母４乗型や分母８乗型の香り式の計算が格段にしやすくなった。

四重積はわかりにくいが、二重積になると式は透明になり扱いやすくなるのである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●例えば、①、②から、$x=0, a=1/\sqrt{2}$ として、前回の下記二式を得る。
　ただし、その α,β は下記の意味であり、①、②の α,β と違うので注意されたい。

＜母等式Ⅰ(分母８乗-A型)フーリエ級数から出た一分割＞

$1/(1^8+1) -3/(3^8+1) +5/(5^8+1) -7/(7^8+1) +\cdots$
$=\pi K_1\sqrt{2}[(A+B)\{\sin(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)+\mathrm{sh}(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\} +(-A+B)\{\cos(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)-\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\}]$

＜母等式Ⅰ(分母８乗-B型)フーリエ級数から出た一分割＞

$1^5/(1^8+1) -3^5/(3^8+1) +5^5/(5^8+1) -7^5/(7^8+1) +\cdots$
$=\pi K_1\sqrt{2}[(A-B)\{\sin(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)+\mathrm{sh}(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\} +(A+B)\{\cos(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)-\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\}]$

ここで、$\alpha=(\pi\sqrt{2}/4)\cos(\pi/8)$, $\beta=(\pi\sqrt{2}/4)\sin(\pi/8)$,
$A=\mathrm{ch}2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\,\mathrm{ch}2\beta$, $B=\mathrm{sh}2\alpha\sin2\beta-\sin2\alpha\,\mathrm{sh}2\beta$

$K_1=1/\{8(A^2+B^2)\}$

●ゼータやゼータ香り式では、フーリエ級数こそが大事である。なぜならそれが母等式となり、そこから分身たちが次々と出現してくるからである。

分母８乗タイプの分割（分身）を得るのは、なかなかたいへんでもあり、いったん脇におきたい。まずは、まだ十分に調べていない分母４乗の香り式の分身たちを先に調べていきたい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.10.9 杉岡幹生