＜ 母等式Ⅰ(分母８乗-A 型,B 型)フーリエ級数から出た一分割 ＞

母等式Ⅰ(分母８乗)のＡ型とＢ型のフーリエ級数がそれぞれ得られた。そこからそれぞれの一分割つまりの次の２式の値が出たので、それを示したい。フーリエ級数はやや複雑な形になったので今回は略す。

$1/(1^8+1) -3/(3^8+1) +5/(5^8+1) -7/(7^8+1) +\cdot\cdot$
$1^5/(1^8+1) -3^5/(3^8+1) +5^5/(5^8+1) -7^5/(7^8+1) +\cdot\cdot$

答えから示すと、次のようになった。sinh,cosh はそれぞれ sh,ch と略記した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜母等式Ⅰ(分母８乗-A 型)フーリエ級数から出た一分割＞

$1/(1^8+1) -3/(3^8+1) +5/(5^8+1) -7/(7^8+1) +\cdot\cdot$
$=\pi K_1\sqrt{2}[(A+B)\{\sin(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)+\mathrm{sh}(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\} +(-A+B)\{\cos(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)-\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\}]$
-----①

＜母等式Ⅰ(分母８乗-B 型)フーリエ級数から出た一分割＞

$1^5/(1^8+1) -3^5/(3^8+1) +5^5/(5^8+1) -7^5/(7^8+1) +\cdot\cdot$
$=\pi K_1\sqrt{2}[(A-B)\{\sin(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)+\mathrm{sh}(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\} +(A+B)\{\cos(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)-\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\}]$
-----②

ここで、$\alpha=(\pi\sqrt{2}/4)\cos(\pi/8)$, $\beta=(\pi\sqrt{2}/4)\sin(\pi/8)$,
$A=\mathrm{ch}2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\,\mathrm{ch}2\beta$, $B=\mathrm{sh}2\alpha\sin2\beta-\sin2\alpha\,\mathrm{sh}2\beta$
$K_1=1/\{8(A^2+B^2)\}$
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようになった。Excel での数値計算も行い、左辺が右辺値に収束することを確認した。

母等式Ⅰ(分母８乗)のＡ型とＢ型のフーリエ級数がまず得られ、その x に 0 を代入し、$a=1/\sqrt{2}$ として得られたものが上記結果である。

フーリエ級数は虚数マジックを使って求めたわけであるが、膨大な計算になった。それでも著しい対称性があるために、先日見出した公式が使えて計算が簡単化されていく。①、②に至るまでに使った公式は以下の六つである。

[四重積-二重積]対称式

対称式Ⅰ(1)

$\sin x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}y - \cos x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot\mathrm{sh}(x-y) + \mathrm{sh}(x+y)\cdot\sin(x-y)\}/2$

対称式Ⅱ(1)

$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y + \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\cos(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot \cos(x+y)\}/2$

対称式Ⅲ(1)

$\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y + \sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\cos(x-y)\cdot \mathrm{sh}(x+y) - \mathrm{sh}(x-y)\cdot \cos(x+y)\}/2$

対称式Ⅲ(2)

$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y + \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\cos(x-y)\cdot \mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y)\cdot \cos(x+y)\}/2$

対称式Ⅳ(1)

$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\sin(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot \sin(x+y)\}/2$

対称式Ⅳ(2)

$\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\cdot \sin(x+y)\}/2$

これは３か月ほど前に発見した１６個の公式（[四重積-二重積]対称式）のうちの六つだが、あまりにも美しい。

ゼータの香りの漂う公式の領域を計算しているとその１６個の公式のどれかにぶち当たることが頻繁にある。そしてぶち当たればその都度１６式のどれに当たるかを調べるということをくり返している。

公式を使えばややこしい四重積が二重積に置き換えられるので、式がすっきりし見通しよく計算を行うことができる。ありがたい式といえる。

さて、前回は以下の値を示した。それも比較の意味で一緒に並べておこう。

$1/(1^8+1) +1/(3^8+1) +1/(5^8+1) +1/(7^8+1) +\cdots$

$1^4/(1^8+1) +3^4/(3^8+1) +5^4/(5^8+1) +7^4/(7^8+1) +\cdots$

$1^2/(1^8+1) +3^2/(3^8+1) +5^2/(5^8+1) +7^2/(7^8+1) +\cdots$

$1^6/(1^8+1) +3^6/(3^8+1) +5^6/(5^8+1) +7^6/(7^8+1) +\cdots$

今見ると名称がいま一つだった気がするが（冒頭のものも分母８乗ゼータ香り式なので)、そのままにしておく。

==================================

＜分母８乗ゼータ香り式Ⅰ＞

$1/(1^8+1) +1/(3^8+1) +1/(5^8+1) +1/(7^8+1) +\cdots$

$=K[\alpha(\mathrm{sh}2\alpha-\sin2\alpha) +\beta(\mathrm{sh}2\beta-\sin2\beta)$

$+(\alpha+\beta)\{\cos(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)\} +(\alpha-\beta)\{\cos(\alpha-\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\}]$ ---③

＜分母８乗ゼータ香り式Ⅱ＞

$1^4/(1^8+1) +3^4/(3^8+1) +5^4/(5^8+1) +7^4/(7^8+1) +\cdots$

$=K[\beta(\mathrm{sh}2\alpha-\sin 2\alpha)-\alpha(\mathrm{sh}2\beta-\sin 2\beta)$
$-(\alpha-\beta)\{\cos(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)\}+(\alpha+\beta)\{\cos(\alpha-\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\}]$ ---④

＜分母８乗ゼータ香り式Ⅲ＞

$1^2/(1^8+1)+3^2/(3^8+1)+5^2/(5^8+1)+7^2/(7^8+1)+\cdots$
$=(K/\sqrt{2})[(\alpha-\beta)(\mathrm{sh}2\alpha+\sin 2\alpha)-(\alpha+\beta)(\mathrm{sh}2\beta+\sin 2\beta)$
$+2\alpha\{\sin(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)\}-2\beta\{\sin(\alpha+\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha+\beta)\}]$ ---⑤

＜分母８乗ゼータ香り式Ⅳ＞

$1^6/(1^8+1)+3^6/(3^8+1)+5^6/(5^8+1)+7^6/(7^8+1)+\cdots$
$=(K/\sqrt{2})[(\alpha+\beta)(\mathrm{sh}2\alpha+\sin 2\alpha)+(\alpha-\beta)(\mathrm{sh}2\beta+\sin 2\beta)$
$+2\beta\{\sin(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)\}+2\alpha\{\sin(\alpha+\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha+\beta)\}]$ ---⑥

ここで、$\alpha=(\pi/\sqrt{2})\cos(\pi/8)$, $\beta=(\pi/\sqrt{2})\sin(\pi/8)$, $K=1/[8\{(\mathrm{ch}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\mathrm{ch}\beta)^2+(\mathrm{sh}\alpha\sin\beta-\sin\alpha\,\mathrm{sh}\beta)^2\}]$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回の①,②と③～⑥の違いや類似性などじっくりと味わっていただきたい。

ここで冒頭の結果を再掲しよう。

$1/(1^8+1)-3/(3^8+1)+5/(5^8+1)-7/(7^8+1)+\cdots$
$=\pi K_1\sqrt{2}[(A+B)\{\sin(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)+\mathrm{sh}(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\}+(-A+B)\{\cos(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)-\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\}]$
------①

$1^5/(1^8+1)-3^5/(3^8+1)+5^5/(5^8+1)-7^5/(7^8+1)+\cdots$
$=\pi K_1\sqrt{2}[(A-B)\{\sin(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)+\mathrm{sh}(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\}+(A+B)\{\cos(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)-\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\}]$
------②

右辺を見ると、①と②でほとんど形が同じものとなっている。違うのは赤文字内の符号だけである。それだけ！　左辺はえらく違って見えるのに・・。
驚くべき類似性、保型性である。
③と④や⑤と⑥でも同様の保型性が出ている。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ①、②は、αとβを交換すれば式は変わるだろうか。前回の③～⑥の結果と併せて示すと以下となる。

①⇒変わる
②⇒変わる

③⇒変わらない（不変）
④⇒変わる
⑤⇒変わる
⑥ ⇒変わる

①も②も「変わる」とわかった。結局αとβの交換で式が不変となるのは③のみである。
「変わらない（不変)」ということは、右辺の分子が$(\alpha-\beta)^{2n}$の因数をもつことを示唆しているのかもしれない。

●なぜわざわざ膨大な計算を行って分母８乗香り式まで来たかというと、右辺の構造を見たいからである。
例えば、①、②の青字の所など、不変量とでもいうべきものになっている。
不変量に大事なものが凝縮されているはずである。

$1/(1^8+1)\ -3/(3^8+1)\ +5/(5^8+1)\ -7/(7^8+1)\ +\cdot\cdot$
$=\pi K_1\sqrt{2}[(A+B)\{\sin(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)+\mathrm{sh}(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\}\ +(-A+B)\{\cos(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)-\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\}]$
------①

$1^5/(1^8+1)\ -3^5/(3^8+1)\ +5^5/(5^8+1)\ -7^5/(7^8+1)\ +\cdot\cdot$
$=\pi K_1\sqrt{2}[(A-B)\{\sin(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)+\mathrm{sh}(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\}\ +(A+B)\{\cos(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)-\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\}]$
------②

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.10.2 杉岡幹生