＜ 分母８乗ゼータ香り式の簡単化 ＞

４年前に出した結果を簡単化できたので、今回はそれを紹介したい。本シリーズの（その４）で私は次の値を求めていた。分母８乗ゼータ香り式とでもいう式の特殊形である（A と B を出しているが、A のみ抜粋）。

$A=1/(1^8+1)+1/(3^8+1)+1/(5^8+1)+1/(7^8+1)+\cdots$

当時の表記をそのままコピーすると、この値は次となる。

A=K[α{(sh2α-s2α)-2sβshβ(caschα+sachα)+2cβchβ(caschα-sachα)}+β{(sh2β-s2β)-2saschα(cβshβ+sβchβ)+2cachα(cβshβ-sβchβ)}]

ここで、α=(π/√2)cos(π/8)、β=(π/√2)sin(π/8)です。

sα、cα、shα、chαは、それぞれsinα、cosα、sinhα、coshαを表します。長くなるので略記しました。sinh、coshは双曲線関数です。またKは、K=1/[8*{(cβchα+cachβ)^2+(sβshα-sashβ)^2}]です。

このような複雑なものになった。
記したように、sin, cos, sinh, cosh はそれぞれ s, c, sh, ch と略記しているので注意いただきたい。例えば、s2α は sin(2α)のことである。

よく見ると対称的な形になっていてそれなりの美しさはあるのだが、複雑！という印象は否めない。

さて、２か月前に私は三角関数と双曲線関数に関する複数の公式（対称式）を発見し報告したが、それを用いることで上記の結果を簡単化できることに気づいた。
用いたのは次の二つの公式である（１６個の式のうちの二つ）。

対称式Ⅲ(3)

$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\cos(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x+y)+\mathrm{sh}(x-y)\cdot \cos(x-y)\}/2$

対称式Ⅳ(3)

$\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y + \cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{ch}(x+y)+\mathrm{ch}(x-y)\cdot \sin(x-y)\}/2$

これらを用いて簡単化した結果は、次のようになった。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$1/(1^8+1)+1/(3^8+1)+1/(5^8+1)+1/(7^8+1)+\cdots$

$=K[\alpha(\mathrm{sh}2\alpha-\mathrm{s}2\alpha)+\beta(\mathrm{sh}2\beta-\mathrm{s}2\beta)$

$+(\alpha+\beta)\{\mathrm{c}(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha+\beta)-\mathrm{s}(\alpha+\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)\}+(\alpha-\beta)\{\mathrm{c}(\alpha-\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)-\mathrm{s}(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\}]$ ---①

ここで、$\alpha=(\pi/\sqrt{2})\cos(\pi/8)$, $\beta=(\pi/\sqrt{2})\sin(\pi/8)$, $K=1/[8\{(\mathrm{ch}\alpha\,\mathrm{c}\beta+\mathrm{c}\alpha\,\mathrm{ch}\beta)^2+(\mathrm{sh}\alpha\,\mathrm{s}\beta-\mathrm{s}\alpha\,\mathrm{sh}\beta)^2\}]$

sin, cos, sinh, cosh はそれぞれ s, c, sh, ch と略記した（一部略していないが）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにすっきりした形になった。

冒頭の見るも恐ろしい形とは大違いである。①を見ると、αとβを交換しても式は変わらない！ことに気づく。

ゼータの香りの漂う公式を変形していると、対称性があちこちに出てきて、美しいことになっている。

冒頭の式でも対称性は出ているが、複雑でわかりにくい。①はすぐに「αとβを交換しても式は不変！」とわかる。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●A 以外の以下の値も求めているが、これらも簡単化していきたい。

４年前に求めた際も、虚数マジックと同等の方法を用いているが、大変長い計算になった。これらは１６個の公式のうちどれを使うことになるだろうか？

$1^2/(1^8+1)+3^2/(3^8+1)+5^2/(5^8+1)+7^2/(7^8+1)+\cdots$

$1^4/(1^8+1)+3^4/(3^8+1)+5^4/(5^8+1)+7^4/(7^8+1)+\cdots$

$1^6/(1^8+1)+3^6/(3^8+1)+5^6/(5^8+1)+7^6/(7^8+1)+\cdots$

●　（その５）の最後で、私は「②は求まらないと思う」と書いている。次のものである。

$1/(1^3+a^2)+1/(3^3+a^2)+1/(5^3+a^2)+1/(7^3+a^2)+\cdots$　　----②

理由は、奇数の$\zeta(3)$が明示的に求まらないことと同じことからである。よって a=1 の次も求まらないはずである。

$1/(1^3+1)+1/(3^3+1)+1/(5^3+1)+1/(7^3+1)+\cdots$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.9.19　杉岡幹生