＜ 対称式Ⅰ(1)は八つの変換で不変 その２＞

前回、対称式Ⅰ(1)の不変性を調べ、位数８の群の対称性を持つことはわかったが、まだその群の種類を特定できていなかった。調べたところ、その群はC4×C2のアーベル群と分かった。また、その対称性・不変性を調べる際に、i^2やi^3（i：虚数単位）をそのままおくというややわかりにくい書き方をしてしまった。今回、その辺のところをもう一度すっきりした形で書き直しておく。

後半の考察と整理の意味から、見出した１６個の公式をまず並べておく。なおsh,chはそれぞれsinh,coshを略したものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[四重積-二重積]対称式Ⅰ

対称式Ⅰ(1)

sinx・shx・cosy・chy − cosx・chx・siny・shy＝{sin(x+y)・sh(x−y) + sh(x+y)・sin(x−y)}/2

対称式Ⅰ(2)

cosx・shx・siny・chy − sinx・chx・cosy・shy＝{sin(x+y)・sh(x−y) − sh(x+y)・sin(x−y)}/2

対称式Ⅰ(3)

sinx・chx・cosy・shy + cosx・shx・siny・chy＝{sin(x+y)・sh(x+y) − sh(x−y)・sin(x−y)}/2

対称式Ⅰ(4)

sinx・shx・cosy・chy + cosx・chx・siny・shy＝{sin(x+y)・sh(x+y) + sh(x−y)・sin(x−y)}/2

[四重積-二重積]対称式Ⅱ

対称式Ⅱ(1)

cosx・shx・cosy・shy + sinx・chx・siny・chy＝{cos(x−y)・ch(x+y) − ch(x−y)・cos(x+y)}/2

対称式Ⅱ(2)

cosx・chx・cosy・chy + sinx・shx・siny・shy＝{cos(x−y)・ch(x+y) + ch(x−y)・cos(x+y) }/2

対称式Ⅱ(3)

cosx・chx・cosy・chy − sinx・shx・siny・shy＝{cos(x+y)・ch(x+y) + ch(x−y)・cos(x−y)}/2

対称式Ⅱ(4)

cosx・shx・cosy・shy − sinx・chx・siny・chy＝{cos(x+y)・ch(x+y) − ch(x−y)・cos(x−y)}/2

[四重積-二重積]対称式Ⅲ

対称式Ⅲ(1)

cosx・chx・cosy・shy + sinx・shx・siny・chy＝{cos(x−y)・sh(x+y) − sh(x−y)・cos(x+y)}/2

対称式Ⅲ(2)

$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y + \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\cos(x-y)\cdot \mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y)\cdot \cos(x+y)\}/2$

対称式Ⅲ(3)

$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\cos(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y)\cdot \cos(x-y)\}/2$

対称式Ⅲ(4)

$\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y - \sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\cos(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x+y) - \mathrm{sh}(x-y)\cdot \cos(x-y)\}/2$

[四重積-二重積]対称式Ⅳ

対称式Ⅳ(1)

$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\sin(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot \sin(x+y)\}/2$

対称式Ⅳ(2)

$\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\cdot \sin(x+y)\}/2$

対称式Ⅳ(3)

$\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y + \cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\cdot \sin(x-y)\}/2$

対称式Ⅳ(4)

$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y + \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot \sin(x-y)\}/2$

ここで、x,y は任意の実数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

さて、対称式Ｉ(1)に着目しよう。以下は、前回の書き換えである。

対称式Ｉ(1)

$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x-y) + \mathrm{sh}(x+y)\cdot \sin(x-y)\}/2$

この式の対称性（不変性）を調べよう。これは、どんな変数の変換で不変となるのだろうか？
調べた結果、以下に示す八つの対称変換で式は形を変えない、つまり不変となることがわかった。

前準備として、次の関係をおぼえておこう。
三角関数と双曲線関数の間には、a を適当な定数、i(虚数単位)として以下の興味深い関係がある。

$i\cdot \mathrm{sh}(a)=\sin(ia)$,　$i\cdot \sin(a)=\mathrm{sh}(ia)$,　$\mathrm{ch}(a)=\cos(ia)$,　$\cos(a)=\mathrm{ch}(ia)$

この関係を使って調べていく。
x,y のセット(x,y)を考えたとき、以下の八つの変換に対して対称式Ｉ(1)は不変となる。(x,y)に対するそれぞれの変換操作を言葉で述べれば、次となる。(i：虚数単位)

Ｅ:「x を x に置き換える、且つ、y を y に置き換える。」

A1：「x を ix に置き換える、且つ、y を iy に置き換える。」
A2：「x を−x に置き換える、且つ、y を−y に置き換える。」
A3：「x を−ix に置き換える、且つ、y を−iy に置き換える。」
A4：「x を x に置き換える、且つ、y を−y に置き換える。」
A5：「x を−x に置き換える、且つ、y を y に置き換える。」
A6：「x を ix に置き換える、且つ、y を−iy に置き換える。」
A7：「x を−ix に置き換える、且つ、y を iy に置き換える。」

これらをまとめたものを示す。

E：(x, y)⇒ (x, y)	A4：(x, y)⇒ (x, −y)
A1：(x, y)⇒ (ix, iy)	A5：(x, y)⇒ (−x, y)
A2：(x, y)⇒ (−x, −y)	A6：(x, y)⇒ (ix, −iy)
A3：(x, y)⇒ (−ix, −iy)	A7：(x, y)⇒ (−ix, iy)

これら全ての変換で対称式Ｉ(1)は不変となる。Ｉ(1)は高い対称性を備えている。そして、これら八つの変換の集合 {E, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7} は群を成す。積表は以下の通り。位数８の群である。左上から右下への対角線に対称に並んでいるので可換群（アーベル群）である。

	E	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
E	E	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A1	A1	A2	A3	E	A6	A7	A5	A4
A2	A2	A3	E	A1	A5	A4	A7	A6
A3	A3	E	A1	A2	A7	A6	A4	A5
A4	A4	A6	A5	A7	E	A2	A1	A3
A5	A5	A7	A4	A6	A2	E	A3	A1
A6	A6	A5	A7	A4	A1	A3	A2	E
A7	A7	A4	A6	A5	A3	A1	E	A2

位数８ともなるとなかなか特定が難しいが、下記の群のサイトから、積表の順番をぐるぐると変えることによって（便利なサイトがある！）、C4×C2 の群で上記積表に一致する下図のものが現れた。よって、上記の積表は C4×C2 の群のものと分かった。

Cayley table

.	e	a	aa	aaa	b	baa	ba	baaa
e	e	a	aa	aaa	b	baa	ba	baaa
a	a	aa	aaa	e	ba	baaa	baa	b
aa	aa	aaa	e	a	baa	b	baaa	ba
aaa	aaa	e	a	aa	baaa	ba	b	baa
b	b	ba	baa	baaa	e	aa	a	aaa
baa	baa	baaa	b	ba	aa	e	aaa	a
ba	ba	baa	baaa	b	a	aaa	aa	e
baaa	baaa	b	ba	baa	aaa	a	e	aa

群のサイトより引用 group C4xC2 - Small Finite Groups and Cayley tables (free.fr)

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****

● ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分母４乗型)と対称式Ⅰ(1)を並べよう。

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分母４乗型)

$$\cos x/(1^4+4a^4) - 3\cos 3x/(3^4+4a^4) + 5\cos 5x/(5^4+4a^4) - 7\cos 7x/(7^4+4a^4) + \cdots$$
$$= (\pi/(2a)^2)\{S1\cdot\cos(ax)\mathrm{ch}(ax) - C1\cdot\sin(ax)\mathrm{sh}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}$$
$$(-\pi/2 < x < \pi/2)$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$，$C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$，a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

対称式Ⅰ(1)

$$\sin x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}y - \cos x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}y = \{\sin(x+y)\cdot\mathrm{sh}(x-y) + \mathrm{sh}(x+y)\cdot\sin(x-y)\}/2$$

これらを見比べると、ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分母４乗型)の右辺の分子の｛ ｝内に対称式Ⅰ(1)左辺と同じものが出ていることが分かる。

●ゼータ香り式分割母等式Ⅱ(分母４乗型)と対称式Ⅲ(1),Ⅳ(1)を並べよう。

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗型）

$$\sin x/(1^4+4a^4) - \sin 3x/(3^4+4a^4) + \sin 5x/(5^4+4a^4) - \sin 7x/(7^4+4a^4) + \cdots$$
$$= (\pi/(2a)^3)\{(C1+S1)\cos(ax)\mathrm{sh}(ax) - (C1-S1)\sin(ax)\mathrm{ch}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}$$
$$(-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$$

ここで、$C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$，a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

対称式Ⅲ(1)

$$\cos x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}y + \sin x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}y = \{\cos(x-y)\cdot\mathrm{sh}(x+y) - \mathrm{sh}(x-y)\cdot\cos(x+y)\}/2$$

対称式Ⅳ(1)

$$\sin x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}y - \cos x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}y = \{\sin(x-y)\cdot\mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot\sin(x+y)\}/2$$

これらを見比べると、ゼータ香り式分割母等式Ⅱ(分母４乗型)の右辺の分子の｛ ｝内に対称式Ⅲ(1)とⅣ(1)の左辺と同じものが出ていることが分かる。

****

2022.7.30 杉岡幹生