＜ L(3)類似香り式２分割の導出＞

今回は、前回発見した新たなフーリエ級数の母等式Ⅰ(分母４乗型)を使って、L(3)類似香り式の１分割、２分割を行ったので紹介したい。

ここでL(3)類似香り式とは次の形のものである。なお、以下のch, shは、それぞれ双曲線関数cosh, sinhのことである。

$1/(1^4+4a^4)\ -3/(3^4+4a^4)\ +5/(5^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +9/(9^4+4a^4)\ -11/(11^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$

aは任意の実数。

上は、$L(3)=1\ -1/3^3\ +1/5^3\ -1/7^3\ +\cdot\cdot$の類似となっている。

まず母等式Ⅰ(分母４乗型)を掲げる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分母４乗型)

$$\cos x/(1^4+4a^4)\ -3\cos 3x/(3^4+4a^4)\ +5\cos 5x/(5^4+4a^4)\ -7\cos 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^2)\{S1\cdot\cos(ax)ch(ax)\ -C1\cdot\sin(ax)sh(ax)\}/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad \text{---①}$$
$$(-\pi/2<x<\pi/2)$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)sh(a\pi/2)$, $C1=\cos(a\pi/2)ch(a\pi/2)$, aは任意の実数（0の場合a->0)。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

では、今回の結果から示す。L(3)類似香り式の１分割、２分割は以下となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(3)類似香り式　１分割＞

$$1/(1^4+4a^4)\ -3/(3^4+4a^4)\ +5/(5^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +9/(9^4+4a^4)\ -11/(11^4+4a^4)\ +13/(13^4+4a^4)\ -15/(15^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^2)S1/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad \text{----②}$$

＜L(3)類似香り式　２分割＞

$$A1=1/(1^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +9/(9^4+4a^4)\ -15/(15^4+4a^4)\ +17/(17^4+4a^4)\ -23/(23^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(8a^2))\{S1+\sqrt{2}(S1\cdot C2-C1\cdot S2)\}/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad \text{---③}$$

$$A2=3/(3^4+4a^4)\ -5/(5^4+4a^4)\ +11/(11^4+4a^4)\ -13/(13^4+4a^4)\ +19/(19^4+4a^4)\ -21/(21^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(8a^2))\{-S1+\sqrt{2}(S1\cdot C2-C1\cdot S2)\}/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad \text{---④}$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)sh(a\pi/2)$, $C1=\cos(a\pi/2)ch(a\pi/2)$,
$S2=\sin(a\pi/4)sh(a\pi/4)$, $C2=\cos(a\pi/4)ch(a\pi/4)$, aは任意の実数（0の場合a->0)。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

A1(③) −A2(④)＝②となるので、A1,−A2 がＬ(3)類似香り式の２分身である。これは、Ｌ(3)２分割の完全な類似になっていることに注意したい。Ｌ(3)２分割⇒（その１６）

では、上記結果の導出の方法を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

ゼータ香り式分割母等式Ｉ(分母４乗型)

$$\cos x/(1^4+4a^4) -3\cos 3x/(3^4+4a^4) +5\cos 5x/(5^4+4a^4) -7\cos 7x/(7^4+4a^4) +\cdots$$
$$=(\pi/(2a)^2)\{S1\cdot\cos(ax)\mathrm{ch}(ax) -C1\cdot\sin(ax)\mathrm{sh}(ax)\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{----①}$$
$$(-\pi/2<x<\pi/2)$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, $C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0)。

①の母等式Ｉ(分母４乗型)の x に 0 を代入すると、次式[A]となる(先に見た１分割の②と同じ)。

$$1/(1^4+4a^4) -3/(3^4+4a^4) +5/(5^4+4a^4) -7/(7^4+4a^4) +9/(9^4+4a^4) -11/(11^4+4a^4) +13/(13^4+4a^4) -15/(15^4+4a^4) +\cdots$$
$$=(\pi/(2a)^2)S1/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{----[A]}$$

さらに①の x にπ/4 を代入すると、次式[B]となる(−π/4 を代入しても同じ)。左辺の符号に着目。

$$1/(1^4+4a^4) +3/(3^4+4a^4) -5/(5^4+4a^4) -7/(7^4+4a^4) +9/(9^4+4a^4) +11/(11^4+4a^4) -13/(13^4+4a^4) -15/(15^4+4a^4) +\cdots$$
$$=\sqrt{2}\cdot(\pi/(2a)^2)(S1\cdot C2 -C1\cdot S2)/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{----[B]}$$

ここで A1,A2 を次のものとしよう。

$$A1=1/(1^4+4a^4) -7/(7^4+4a^4) +9/(9^4+4a^4) -15/(15^4+4a^4) +17/(17^4+4a^4) -23/(23^4+4a^4) +\cdots$$
$$A2=3/(3^4+4a^4) -5/(5^4+4a^4) +11/(11^4+4a^4) -13/(13^4+4a^4) +19/(19^4+4a^4) -21/(21^4+4a^4) +\cdots$$

[A],[B]を A1,A2 を用いて書き直したものを示す。

$$A1 -A2=(\pi/(2a)^2)S1/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{----[A]}$$
$$A1 +A2=\sqrt{2}\cdot(\pi/(2a)^2)(S1\cdot C2 -C1\cdot S2)/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{----[B]}$$

これを連立方程式として解いて、２分身 A1,A2 を得る。

以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにしてＬ(3)類似香り式の２分身が得られた。建造物のブロックを分解するようにして連立方程式から得られる。

２分身で a->0 とするとＬ(3)の２分身に一致する（その１６）。(ロピタル定理を使うが、三角関数、双曲線関数のべき級数展開を使うと便利。計算を節約可能。）よって上記結果はゼータ分割をも包含する一般的なものとなっている。複数の a の値で数値計算も行ったが、大丈夫であった。②～④の左辺は右辺値に収束する。

最後に、今回の結果をもう一度眺めよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(3)類似香り式　１分割＞

$$1/(1^4+4a^4)\ -3/(3^4+4a^4)\ +5/(5^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +9/(9^4+4a^4)\ -11/(11^4+4a^4)\ +13/(13^4+4a^4)\ -15/(15^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^2)\,S1/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{----②}$$

＜L(3)類似香り式　２分割＞

$$A1=1/(1^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +9/(9^4+4a^4)\ -15/(15^4+4a^4)\ +17/(17^4+4a^4)\ -23/(23^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(8a^2))\{S1+\sqrt{2}(S1\cdot C2-C1\cdot S2)\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{----③}$$

$$A2=3/(3^4+4a^4)\ -5/(5^4+4a^4)\ +11/(11^4+4a^4)\ -13/(13^4+4a^4)\ +19/(19^4+4a^4)\ -21/(21^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(8a^2))\{-S1+\sqrt{2}(S1\cdot C2-C1\cdot S2)\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{----④}$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, $C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$,
$S2=\sin(a\pi/4)\mathrm{sh}(a\pi/4)$, $C2=\cos(a\pi/4)\mathrm{ch}(a\pi/4)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0)。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

A1(③)から A2(④)を引いたら②の L(3)類似香り式になる。この過程は味わい深い。

では、A1 と A2 を足したら、どうなるか？これは導出の方法での[B]となる。左辺の符号に着目！

$$1/(1^4+4a^4)\ +3/(3^4+4a^4)\ -5/(5^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +9/(9^4+4a^4)\ +11/(11^4+4a^4)\ -13/(13^4+4a^4)\ -15/(15^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=\sqrt{2}\cdot(\pi/(2a)^2)(S1\cdot C2\ -C1\cdot S2)/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{---[B]}$$

これは、虚２次体 $Q(\sqrt{-2})$ ゼータ $L_2(s)$ の”$L_2(s)=1\ +1/3^s\ -1/5^s\ -1/7^s\ +1/9^s\ +1/11^s\ -1/13^s\ -1/15^s+\cdot\cdot$”の類似物であり、$L_2(3)$ 類似香り式となっている。

最後にテーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 結局、A1 と A2 は、L(3)類似香り式と $L_2(3)$ 類似香り式の共通のパーツ（部品）となっている。そして、４分割、８分割、１６分割・・としていった場合、パーツがどんどん小さなパーツに割れていく。たくさんの共通パーツでこのニゼータが構成される。フラクタル構造！

２分割⇒４分割⇒８分割⇒１６分割⇒・・

結局、ゼータ香り式の分割は、ゼータ分割とまったく同じにようになっている。

●上記に加え、香り式の分割は、過去のゼータ分割の類推から、

３分割⇒６分割⇒１２分割⇒・・

５分割⇒１０分割⇒２０分割⇒・・

というふうになっているはずである。

● すこし前に調べたＬ(1)類似香り式を見てみよう。

$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots = (\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

両辺をａについて微分すると、次式⑤を得る。

$$1/(1^2+a^2)^2 -3/(3^2+a^2)^2 +5/(5^2+a^2)^2 -7/(7^2+a^2)^2 +9/(9^2+a^2)^2 -11/(11^2+a^2)^2 +\cdots$$
$$=(\pi^2/(16a))\,\mathrm{sh}(a\pi/2)/\mathrm{ch}^2(a\pi/2) \quad \text{---⑤}$$

この⑤と、今回見たＬ(3)類似香り式の次式②を比べたい。

$$1/(1^4+4a^4)\ -3/(3^4+4a^4)\ +5/(5^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +9/(9^4+4a^4)\ -11/(11^4+4a^4)\ +13/(13^4+4a^4)\ -15/(15^4+4a^4)\ +\cdots$$
$$=(\pi/(2a)^2)\sin(a\pi/2)\,\mathrm{sh}(a\pi/2)/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{-----②}$$

注記：上方②の S1 を sin(aπ/2)sh(aπ/2)で置き換えた。

②と⑤は、a->0 としたらＬ(3)になるので、どちらもＬ(3)類似香り式といえるかもしれない。しかし私は格調(深さ)が違うと感じる。どちらが深いか？

②の方がはるかに深い。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.5.5 杉岡幹生