＜ 母等式Ⅰによる L(1)類似香り式３分割の導出＞

今回は、下記ゼータ香り式分割母等式Ⅰを用いて、L(1)類似香り式の３分割（３分身）を導出したので、それを示したい。ここで、L(1)類似香り式は次のものである。なお、以下の ch, sh は、それぞれ双曲線関数 cosh, sinh のことである。

$$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

a は任意の実数。

上式は、L(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +・・の類似となっている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ

$$\sin x/(1^2+a^2)\ +3\sin 3x/(3^2+a^2)\ +5\sin 5x/(5^2+a^2)\ +\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$(0<x<\pi)$

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ

$$\cos x/(1^2+a^2)\ +\cos 3x/(3^2+a^2)\ +\cos 5x/(5^2+a^2)\ +\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$(0\leqq x\leqq\pi)$

a は任意の実数（後者において 0 の場合は a->0)。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

では、まず今回の結果から示す。L(1)類似香り式の３分割は以下となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(1)類似香り式＞

$$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\quad \text{----①}$$

a は任意の実数。

＜L(1)類似香り式の３分割＞

$$A1=1/(1^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +13/(13^2+a^2)\ -23/(23^2+a^2)\ +25/(25^2+a^2)\ -35/(35^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/6)\{\mathrm{ch}^2(a\pi/6)\ +(\sqrt{3}/2)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)\quad \text{---②}$$

$$A2=3/(3^2+a^2)\ -9/(9^2+a^2)\ +15/(15^2+a^2)\ -21/(21^2+a^2)\ +27/(27^2+a^2)\ -33/(33^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/12)\{2\cdot\mathrm{ch}(a\pi/3)\ -1\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)\quad \text{-----③}$$

$$A3=5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +17/(17^2+a^2)\ -19/(19^2+a^2)\ +29/(29^2+a^2)\ -31/(31^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/6)\{\mathrm{ch}^2(a\pi/6)\ -(\sqrt{3}/2)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)\quad \text{---④}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

A1 −A2 +A3＝①となるので、A1, −A2, A3 が L(1)類似香り式の３分身である。これは、L(1)３分割の完全な類似になっていることに注意したい。L(1)３分割⇒（その９０）

では、上記結果の導出の方法を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

ゼータ香り式分割母等式Ｉ

$$\sin x/(1^2+a^2)+3\sin 3x/(3^2+a^2)+5\sin 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

（0＜x＜π，ａは任意の実数）

上記の母等式Ｉのｘにπ/3 を代入すると、次となる(2π/3 を代入しても同じ)。

$$1/(1^2+a^2)-5/(5^2+a^2)+7/(7^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+13/(13^2+a^2)-17/(17^2+a^2)+19/(19^2+a^2)-23/(23^2+a^2)+\cdots$$
$$=(2/\sqrt{3})(\pi/4)\mathrm{ch}(a\pi/6)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{-----⑤}$$

母等式Ｉのｘにπ/6 を代入すると、次となる(5π/6 を代入しても同じ)。

$$\{1/(1^2+a^2)+5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+13/(13^2+a^2)+17/(17^2+a^2)-19/(19^2+a^2)-23/(23^2+a^2)+\cdots\}$$
$$+2\{3/(3^2+a^2)-9/(9^2+a^2)+15/(15^2+a^2)-21/(21^2+a^2)+27/(27^2+a^2)-\cdots\}=(\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/3)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{---⑥}$$

母等式Ｉのｘに3π/6（つまりπ/2）を代入すると、次となる。

$$1/(1^2+a^2)-3/(3^2+a^2)+5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+13/(13^2+a^2)-15/(15^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{-----⑦}$$

さて、ここでA1～A3 を次のものとしよう。

$$A1=1/(1^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+13/(13^2+a^2)-23/(23^2+a^2)+25/(25^2+a^2)-35/(35^2+a^2)+\cdots$$
$$A2=3/(3^2+a^2)-9/(9^2+a^2)+15/(15^2+a^2)-21/(21^2+a^2)+27/(27^2+a^2)-33/(33^2+a^2)+\cdots$$
$$A3=5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+17/(17^2+a^2)-19/(19^2+a^2)+29/(29^2+a^2)-31/(31^2+a^2)+\cdots$$

⑤～⑦をA1,A2,A3 を用いて書き直すと、次となる。

$$A1-A3=(\pi/(2\sqrt{3}))\mathrm{ch}(a\pi/6)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{------⑤}$$
$$A1+A3+2\cdot A2=(\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/3)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{------⑥}$$
$$A1-A2+A3=(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{------⑦}$$

これをA1,A2,A3 の連立方程式として解いて、冒頭で示した３分身②～④を得る。
以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにしてＬ(1)類似香り式の３分身が得られた。建造物を分解していくかのようにして、連立方程式から、きれいに得られる。

３分身でａ=0 とするとＬ(1)の３分身に一致する⇒（その９０）。よって上記結果はゼータ分割をも包含する一般的なものとなっている。数値計算も行ったが(a＝0.3,a＝10 で)、OK であった（2000 万項)。②～④の左辺の級数は右辺値に収束する。

再度、結果を眺めよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(1)類似香り式＞

$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　－－－①

a は任意の実数。

＜L(1)類似香り式の３分割＞

$A1=1/(1^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +13/(13^2+a^2)\ -23/(23^2+a^2)\ +25/(25^2+a^2)\ -35/(35^2+a^2)+\cdots$

$=(\pi/6)\{\mathrm{ch}^2(a\pi/6)\ +(\sqrt{3}/2)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　－－－②

$A2=3/(3^2+a^2)\ -9/(9^2+a^2)\ +15/(15^2+a^2)\ -21/(21^2+a^2)\ +27/(27^2+a^2)\ -33/(33^2+a^2)+\cdots$

$=(\pi/12)\{2\cdot\mathrm{ch}(a\pi/3)\ -1\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　－－－－－③

$A3=5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +17/(17^2+a^2)\ -19/(19^2+a^2)\ +29/(29^2+a^2)\ -31/(31^2+a^2)+\cdots$

$=(\pi/6)\{\mathrm{ch}^2(a\pi/6)\ -(\sqrt{3}/2)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　－－－④

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

A1 －A2 ＋A3＝①が成り立っている。

A1,－A2,A3 がＬ(1)類似香り式の３分身である。この美しい秩序を味わっていただきたい。

ここで、③(A2)に対し、ちょっとした注意を述べておこう。（これは（その２４２）のＺ(2)類似香り式の３分割で指摘したことと同類のものであるが・・）

（その９０）では指摘していないが、その後で指定していったように、（その９０）のＬ(1)３分割の A2 は

$A2=1/3\ -1/9\ +1/15\ -1/21+\ 1/27\ -1/33+\cdots=(1/3)(1\ -1/3\ +1/5\ -1/7\ +1/9\ -1/11\ +\cdots)\ =(1/3)L(1)$

と変形できＬ(1)の有理数倍になって実質的にＬ(1)と等しいものになる。よってそのＬ(1)３分割というのは本質的にはＬ(1)２分割である。

$A2=3/(3^2+a^2)\ -9/(9^2+a^2)\ +15/(15^2+a^2)\ -21/(21^2+a^2)\ +27/(27^2+a^2)\ -33/(33^2+a^2)+\cdots$

$=(\pi/12)\{2\cdot\mathrm{ch}(a\pi/3)\ -1\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　－－－－－③

一方で、今回のＬ(1)類似香り式での上記 A2(③)は、

A2＝有理数×{L(1)類似香り式(①)}

とはならない。(直感でわかるが、計算でもわかる。上記を仮定すると矛盾が出る。)

よって、Ｌ(1)類似香り式の３分割は実質的な３分割になっている。しかし、③で a＝3b と変数変換すれば、計算を経て、次を得る。

$1/(1^2+b^2)\ -3/(3^2+b^2)\ +5/(5^2+b^2)\ -7/(7^2+b^2)\ +9/(9^2+b^2)\ -11/(11^2+b^2)\ +\cdots=(\pi/4)/\mathrm{ch}(b\pi/2)$

これは、本稿の冒頭で示したＬ(1)類似香り式に等しいので、③(A2)は、変数変換という意味において本質的にＬ(1)類似香り式に等しいと言える。しかし分割の意味においては、③(A2)は、Ｌ(1)類似香り式における実質的な３分割の一つ（ちゃんとした分身）になっている。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 　前回発見したフーリエ級数、Z(4)類似香り式（つまりζ(4)類似香り式）の母等式Ⅱを再び眺めよう。

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗型）

$$\sin x/(1^4+4a^4)\ -\sin 3x/(3^4+4a^4)\ +\sin 5x/(5^4+4a^4)\ -\sin 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^3)\{(C1+S1)\cos(ax)\,\mathrm{sh}(ax)\ -(C1-S1)\sin(ax)\,\mathrm{ch}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}$$
$$(-\pi/2\leqq x\leqq \pi/2)$$

ここで、$C1=\cos(a\pi/2)\,\mathrm{ch}(a\pi/2)$、$S1=\sin(a\pi/2)\,\mathrm{sh}(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

くり返しになるが、この新しいフーリエ級数は虚数の魔法的な方法（“虚数マジック”と名付けた）という方法で導いた。それは（その２３８）で見つけたものだが、虚数マジックは公式を生み出すための強力な道具という感じがする。

それは、未開の荒野に道をつけるためのマシン、あるいはトンネルを掘るための強力なドリルである。

● その母等式Ⅱ（分母４乗型）の対称性を調べたい。

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗型）

$$\sin x/(1^4+4a^4)\ -\sin 3x/(3^4+4a^4)\ +\sin 5x/(5^4+4a^4)\ -\sin 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^3)\{(C1+S1)\cos(ax)\,\mathrm{sh}(ax)\ -(C1-S1)\sin(ax)\,\mathrm{ch}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}$$

このフーリエ級数を見出してから、一見して「この式は高い対称性を備えている」ことに気づいていた。右辺の分母の“cos(aπ)+ch(aπ)”自体、あまり見ない形というか、奇妙な変わった形をしている・・

ところで、三角関数と双曲線関数の間には、i(虚数単位)を用いて次の興味深い関係がある。

$$\sin(ia)=i\cdot\mathrm{sh}(a),\ i\cdot\sin(a)=\mathrm{sh}(ia),\quad \cos(ia)=\mathrm{ch}(a),\ \cos(a)=\mathrm{ch}(ia)\qquad \text{----[C]}$$

こんな面白い関係がある。分母の奇妙さも、この関係とかかわっている。

さて、上式の対称性を見よう。

x,a をともに変数と見てそのセット(x,a)を考えたとき、以下の八つの変換操作に対して母等式Ⅱ（分母４乗型）は不変となる!

(x,a)に対するそれぞれの変換操作を言葉で述べれば、次となる。(i：虚数単位)

E：「x を同じものに置き換える、且つ、a を同じものに置き換える。」

A1：「x を同じものに置き換える、且つ、a を i 倍したものに置き換える。」

A2：「x を同じものに置き換える、且つ、a を i^2倍したものに置き換える。」

A3：「x を同じものに置き換える、且つ、a を i^3倍したものに置き換える。」

A4：「x を-1 倍したものに置き換える、且つ、a を同じものに置き換える。」

A5：「x を-1 倍したものに置き換える、且つ、a を i 倍したものに置き換える。」

A6：「x を-1 倍したものに置き換える、且つ、a を i^2倍したものに置き換える。」

A7：「x を-1 倍したものに置き換える、且つ、a を i^3倍したものに置き換える。」

上を表にまとめると、以下となる。

E:(x, a)⇒ (x, a)	A4:(x, a)⇒ (−x, a)
A1:(x, a)⇒ (x, ia)	A5:(x, a)⇒ (−x, ia)
A2:(x, a)⇒ (x, i^2a)	A6:(x, a)⇒ (−x, i^2a)
A3:(x, a)⇒ (x, i^3a)	A7:(x, a)⇒ (−x, i^3a)

これらの操作を元として持つ集合G＝{E, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7}を考えると、このGは群を成す。積表を下に示す。この位数８の群はどんな種類の群なのか。下記の群論サイトで一致しているものを探すと、C4×C2 というタイプの群と分かった。サイトでの下図 C4×C2 の積表に一致している。右下への対角線に対称的に並んでいるので、この群は可換群（アーベル群）である。

	E	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
E	E	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A1	A1	A2	A3	E	A5	A6	A7	A4
A2	A2	A3	E	A1	A6	A7	A4	A5
A3	A3	E	A1	A2	A7	A4	A5	A6
A4	A4	A5	A6	A7	E	A1	A2	A3
A5	A5	A6	A7	A4	A1	A2	A3	E
A6	A6	A7	A4	A5	A2	A3	E	A1
A7	A7	A4	A5	A6	A3	E	A1	A2

サイトより引用 http://escarbille.free.fr/group/?g=8_2

Cayley table

.	e	a	aa	aaa	b	ba	baa	baaa
e	e	a	aa	aaa	b	ba	baa	baaa
a	a	aa	aaa	e	ba	baa	baaa	b
aa	aa	aaa	e	a	baa	baaa	b	ba
aaa	aaa	e	a	aa	baaa	b	ba	baa
b	b	ba	baa	baaa	e	a	aa	aaa
ba	ba	baa	baaa	b	a	aa	aaa	e
baa	baa	baaa	b	ba	aa	aaa	e	a
baaa	baaa	b	ba	baa	aaa	e	a	aa

変換操作で計算すると、奇妙に見えた分母の形が対称性に大きく貢献していることに気づく。その隠されたカラクリには驚かされる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.4.17 杉岡幹生

＜参考文献＞

●Small finite groups and Cayley tables http://escarbille.free.fr/group/

●「やさしい群論入門」（藤永茂、成田進著、岩波書店）