＜ Z(2)類似香り式３分割の導出＞

今回は、ゼータ香り式分割母等式Ⅱを用いて、Z(2)類似香り式の３分割（３分身）を導出したい。

Z(2)は、$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=(3/4)\zeta(2)=\pi^2/8$ であり、本質的に$\zeta(2)$と等しいものである。“Z(n)”という記法は一般的なものではない。以下の ch, sh, th はそれぞれ双曲線関数 cosh, sinh, tanh のことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ

$$\sin x/(1^2+a^2)+3\sin 3x/(3^2+a^2)+5\sin 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$(0<x<\pi)$

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ

$$\cos x/(1^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$(0\leqq x\leqq\pi)$

a は任意の実数。（後者は 0 の場合、a->0 を意味する）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

では、まず結果から先に示す。Z(2)類似香り式の３分割は以下となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Z(2)類似香り式＞

$$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{th}(a\pi/2)\quad\text{-----①}$$

a は任意の実数（0 の場合は a->0)。

この Z(2)類似ゼータ香り式①の３分身は、次の②～④（A1～A3）となる。

＜Z(2)類似香り式の３分割（３分身）＞

$$A1=1/(1^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(23^2+a^2)+1/(25^2+a^2)+1/(35^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(12a))\{\mathrm{sh}(a\pi/2)+\sqrt{3}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/3)+\mathrm{sh}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)\quad\text{--②}$$

$$A2=1/(3^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+1/(27^2+a^2)+1/(33^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(12a))\{\mathrm{sh}(a\pi/2)-2\cdot\mathrm{sh}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)\quad\text{-------③}$$

$$A3=1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(17^2+a^2)+1/(19^2+a^2)+1/(29^2+a^2)+1/(31^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(12a))\{\mathrm{sh}(a\pi/2)-\sqrt{3}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/3)+\mathrm{sh}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)\quad\text{--④}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

A1 +A2 +A3＝①となるので、A1, A2, A3 が Z(2)類似香り式の３分身である。これは、Z(2)３分割の完全な類似になっていることにも注意したい。Z(2)３分割⇒（その３１）

では、上記結果の導出の方法を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ

$\cos x/(1^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 5x/(5^2+a^2)+\cos 7x/(7^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

($0\leqq x\leqq \pi$, a は任意の実数(0 の場合は $a\to 0$))

母等式Ⅱの x に 0 を代入すると、次となる(πを代入しても同じ)。

$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+\cdots$

$=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a\pi/2)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑤

母等式Ⅱの x にπ/3 を代入すると、次となる(2π/3 を代入しても同じ)。

$(1/2)\{1/(1^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(17^2+a^2)+1/(19^2+a^2)+1/(23^2+a^2)+\cdots\}$

$-\{1/(3^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+1/(27^2+a^2)+1/(33^2+a^2)+1/(39^2+a^2)+\cdots\}$

$=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a\pi/6)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑥

母等式Ⅱの x にπ/6 を代入すると、次となる(5π/6 を代入しても同じ)。

$(\sqrt{3}/2)\{1/(1^2+a^2)-1/(5^2+a^2)-1/(7^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)-1/(17^2+a^2)-1/(19^2+a^2)+1/(23^2+a^2)+\cdots\}$

$=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a\pi/3)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑦

さて、ここで A1～A3 を次のものとしよう。

$A1=1/(1^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(23^2+a^2)+1/(25^2+a^2)+1/(35^2+a^2)+\cdots$

$A2=1/(3^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+1/(27^2+a^2)+1/(33^2+a^2)+\cdots$

$A3=1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(17^2+a^2)+1/(19^2+a^2)+1/(29^2+a^2)+1/(31^2+a^2)+\cdots$

⑤～⑦を A1,A2,A3 を用いて書き直すと、次となる。

$A1+A2+A3=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a\pi/2)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑤

$\{A1+A3\}/2-A2=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a\pi/6)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑥

$(\sqrt{3}/2)\{A1-A3\}=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a\pi/3)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑦

これを A1, A2,A3 の連立方程式として解いて、冒頭で示した３分身②～④を得る。
以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして Z(2)類似香り式の３分身が得られた。連立方程式がたって、織物の糸をほどくように、うまい具合に得られていく。

３分身で a->0 とすると Z(2)の３分身に一致する。よって、上記結果はゼータ分割をも包含する一般的なものとなっている。

数値計算も行ったが(a＝0.3,a＝10 で)、OK であった。②～④左辺の級数は右辺値に収束する。

再度、結果をまとめておこう。

****

＜Z(2)類似香り式＞

$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\,\mathrm{th}(a\pi/2)$ ----①

a は任意の実数（0 の場合は a->0）。

このZ(2)類似ゼータ香り式①の３分身は、次の②～④（A1～A3）となる。

＜Z(2)類似香り式の３分割（３分身）＞

$A1=1/(1^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(23^2+a^2)+1/(25^2+a^2)+1/(35^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/(12a))\{\mathrm{sh}(a\pi/2)+\sqrt{3}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/3)+\mathrm{sh}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---②

$A2=1/(3^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+1/(27^2+a^2)+1/(33^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/(12a))\{\mathrm{sh}(a\pi/2)-2\cdot\mathrm{sh}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---------③

$A3=1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(17^2+a^2)+1/(19^2+a^2)+1/(29^2+a^2)+1/(31^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/(12a))\{\mathrm{sh}(a\pi/2)-\sqrt{3}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/3)+\mathrm{sh}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---④

****

②から④を全て足したら①になるという美しい構造を味わっていただきたい。

ここで、A2 に対し、ちょっとした注意を述べておこう。

$A2=1/(3^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+1/(27^2+a^2)+1/(33^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/(12a))\{\mathrm{sh}(a\pi/2)-2\cdot\mathrm{sh}(a\pi/6)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ --③

（その３１）のZ(2)３分割では指摘していないが、その後で指定していったように、そのZ(2)３分割の A2 は
$A2=1/3^2+1/9^2+1/15^2+1/21^2+1/27^2+1/33^2+\cdots=(1/3^2)(1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots)=(1/3^2)Z(2)$
と変形できZ(2)の有理数倍になって、実質的にZ(2)と等しいものになる。よってZ(2)３分割というのは本質的にはZ(2)２分割となっている。

一方で、今回のZ(2)類似香り式での上記 A2(③)は、

$A2=$有理数$\times\{1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+\cdots\}$

とはならない。（直感でもわかるが、計算でわかる。）

よって、Z(2)類似香り式の３分割は、実質的な３分割になっている。ただし、③は、a＝3b と変数変換すれば、少し複雑な計算を経て、次となる。

$1/(1^2+b^2)+1/(3^2+b^2)+1/(5^2+b^2)+1/(7^2+b^2)+1/(9^2+b^2)+1/(11^2+b^2)+\cdots=(\pi/(4b))\,\mathrm{th}(b\pi/2)$

したがって③は、変数変換という意味において本質的にZ(2)類似香り式に等しい。しかし分割の意味においては、③（A2）は、Z(2)類似香り式における実質的な３分割（ちゃんとした分身）になっている。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 母等式Ⅱは、公式集にも載っているフーリエ級数である。

$\cos x/(1^2+a^2)$ $+\cos 3x/(3^2+a^2)$ $+\cos 5x/(5^2+a^2)$ $+\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$(0\leqq x\leqq\pi)$

私は、次のステップとして、

$\cos x/(1^4+a^2)$ $+\cos 3x/(3^4+a^2)$ $+\cos 5x/(5^4+a^2)$ $+\cdots=?$ ---⑧

という分母がｎの４乗の形のフーリエ級数を求めたいと思っている。計算によって、このフーリエ級数は必ず存在している。公式集にはないが右辺は明示的な初等的な関数で出るはずである。右辺の正体は、まだわからない。⑧が出れば、さらに深いところに行くことができる。

● 母等式Ⅰ、Ⅱを再掲。

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ

$\sin x/(1^2+a^2)$ $+3\sin 3x/(3^2+a^2)$ $+5\sin 5x/(5^2+a^2)$ $+\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$(0<x<\pi)$

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ

$\cos x/(1^2+a^2)$ $+\cos 3x/(3^2+a^2)$ $+\cos 5x/(5^2+a^2)$ $+\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$(0\leqq x\leqq\pi)$

この辺々を割り算すると、次式を得る。

$\cos x/(1^2+a^2)$ $+\cos 3x/(3^2+a^2)$ $+\cos 5x/(5^2+a^2)$ $+\cdots$

$=(1/a)\mathrm{th}(a(\pi/2-x))\{\sin x/(1^2+a^2)$ $+3\sin 3x/(3^2+a^2)$ $+5\sin 5x/(5^2+a^2)$ $+\cdots\}$ ---⑨

$(0<x<\pi)$

コサインフーリエ級数とサインフーリエ級数が結びついた式となっている。

左辺は$\zeta(2)$を代表とする実２次体ゼータの領域、右辺{ }はＬ(1)を代表とする虚２次体ゼータの領域である。$\zeta(s)$とＬ(s)は、このように香り式のフーリエ級数でも密接に結びついている。

● 上記⑨で、a->0 とすると次を得る。

$\cos x/1^2$ $+\cos 3x/3^2$ $+\cos 5x/5^2$ $+\cdots=(\pi/2-x)\{\sin x/1$ $+\sin 3x/3$ $+\sin 5x/5$ $+\cdots\}$ ---⑩

$(0<x<\pi)$

これもすごい式である。実(コサインフーリエ級数)と虚(サインフーリエ級数)の二つが結びついている。しかしこれも公式集に実質的には出ている。

$\cos x/1^2$ $+\cos 3x/3^2$ $+\cos 5x/5^2$ $+\cdots=(\pi/2-x)(\pi/4)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$

$\sin x/1$ $+\sin 3x/3$ $+\sin 5x/5$ $+\cdots=\pi/4$ $(0<x<\pi)$

これらフーリエ級数を合わせれば⑩が出る。とはいえ、こんなフーリエ級数より⑩の方がずっと深いことを示している。

● 上記の“深いこと”というのは、虚２次体の類数公式と実２次体の類数公式が結びつくという意味である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.4.3 杉岡幹生

参考文献

・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)