＜ 母等式ＩによるＬ(1)類似香り式４分割の導出＞

今回は、ゼータ香り式分割母等式Ｉを用いて、Ｌ(1)類似香り式の４分割（４分身）を導出したい。
ここで、Ｌ(1)類似香り式は、

$$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

ａは任意の実数。

のことである。

Ｌ(1)＝1 -1/3 +1/5 -1/7 +・・の類似となっていることから、“Ｌ(1)類似香り式”と名付けた。

以下の ch,sh は、それぞれ双曲線関数 cosh,sinh のことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ｉ

$$\sin x/(1^2+a^2)\ +3\sin 3x/(3^2+a^2)\ +5\sin 5x/(5^2+a^2)\ +\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$(0<x<\pi)$

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ

$$\cos x/(1^2+a^2)\ +\cos 3x/(3^2+a^2)\ +\cos 5x/(5^2+a^2)\ +\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$(0\leqq x\leqq\pi)$

ａは任意の実数。（後者で０の場合は a->0 を意味する）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

では、まず結果から示す。Ｌ(1)類似香り式の４分割は以下となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Ｌ(1)類似香り式＞

$$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\quad\text{----①}$$

ａは任意の実数。

このＬ(1)類似香り式①の４分身は、次の②～⑤（A1～A4）となる。
ここで、$\alpha=\sin(\pi/8)=\cos(3\pi/8)=(1/2)\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 、$\beta=\cos(\pi/8)=\sin(3\pi/8)=(1/2)\sqrt{2+\sqrt{2}}$。

＜Ｌ(1)類似香り式の４分割（４分身）＞

$$A1=1/(1^2+a^2)\ -15/(15^2+a^2)\ +17/(17^2+a^2)\ -31/(31^2+a^2)+\ 33/(33^2+a^2)\ -47/(47^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/8)\{1/2\ +(\sqrt{2}/2)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\ +\alpha\cdot\mathrm{ch}(3a\pi/8)\ +\beta\cdot\mathrm{ch}(a\pi/8)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)\quad\text{---②}$$

$$A2=3/(3^2+a^2)\ -13/(13^2+a^2)\ +19/(19^2+a^2)\ -29/(29^2+a^2)+\ 35/(35^2+a^2)\ -45/(45^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/8)\{-1/2\ +(\sqrt{2}/2)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\ +\beta\cdot\mathrm{ch}(3a\pi/8)\ -\alpha\cdot\mathrm{ch}(a\pi/8)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)\quad\text{---③}$$

$$A3=5/(5^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +21/(21^2+a^2)\ -27/(27^2+a^2)+\ 37/(37^2+a^2)\ -43/(43^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/8)\{1/2\ -(\sqrt{2}/2)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\ +\beta\cdot\mathrm{ch}(3a\pi/8)\ -\alpha\cdot\mathrm{ch}(a\pi/8)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)\quad\text{---④}$$

$A4=7/(7^2+a^2) -9/(9^2+a^2) +23/(23^2+a^2) -25/(25^2+a^2)+ 39/(39^2+a^2) -41/(41^2+a^2)+\cdots$

$=(\pi/8)\{-1/2 -(\sqrt{2}/2)\cdot ch(a\pi/4) +\alpha\cdot ch(3a\pi/8) +\beta\cdot ch(a\pi/8)\}/ch(a\pi/2)$　---⑤

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

A1 -A2 +A3 -A4＝①となるので、A1, A2,A3,A4 がＬ(1)類似香り式の４分身である。これは、Ｌ(1)４分割の完全な類似になっていることにも注意したい。Ｌ(1)４分割⇒（その１４）

A1 -A2 +A3 -A4＝①から、美と調和を感じる。

では、上記結果の導出の方法を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

以下でα, βは、$\alpha=\sin(\pi/8)=\cos(3\pi/8)=(1/2)\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\beta=\cos(\pi/8)=\sin(3\pi/8)=(1/2)\sqrt{2+\sqrt{2}}$ である。

ゼータ香り式分割母等式Ｉ

$\sin x/(1^2+a^2) +3\sin 3x/(3^2+a^2) +5\sin 5x/(5^2+a^2) +\cdots=(\pi/4)ch(a(\pi/2-x))/ch(a\pi/2)$

（0＜x＜π, a は任意の実数）

この母等式Ｉの x にπ/2 を代入すると、Ｌ(1)類似香り式①となる。

$1/(1^2+a^2) -3/(3^2+a^2) +5/(5^2+a^2) -7/(7^2+a^2) +9/(9^2+a^2) -11/(11^2+a^2) +13/(13^2+a^2) -15/(15^2+a^2)\cdots$

$=(\pi/4)/ch(a\pi/2)$　----①

母等式Ｉの x にπ/4 を代入すると、次となる(3π/4 を代入しても同じ)。

$1/(1^2+a^2) +3/(3^2+a^2) -5/(5^2+a^2) -7/(7^2+a^2) +9/(9^2+a^2) +11/(11^2+a^2) -13/(13^2+a^2) -15/(15^2+a^2) +\cdots$

$=\sqrt{2}\cdot(\pi/4)ch(a\pi/4)/ch(a\pi/2)$　----⑥

母等式Ｉの x にπ/8 を代入すると、次となる(7π/8 を代入しても同じ)。

$\alpha\{1/(1^2+a^2) +7/(7^2+a^2) -9/(9^2+a^2) -15/(15^2+a^2) +17/(17^2+a^2) +23/(23^2+a^2) -25/(25^2+a^2) -31/(31^2+a^2) +\cdots\}$

$+\beta\{3/(3^2+a^2) +5/(5^2+a^2) -11/(11^2+a^2) -13/(13^2+a^2) +19/(19^2+a^2) +21/(21^2+a^2) -27/(27^2+a^2) -29/(29^2+a^2) +\cdots\}$

$=(\pi/4)ch(3a\pi/8)/ch(a\pi/2)$　----⑦

母等式Ｉの x に 3π/8 を代入すると、次となる(5π/8 を代入しても同じ)。

$\alpha\{-3/(3^2+a^2) -5/(5^2+a^2) +11/(11^2+a^2) +13/(13^2+a^2) -19/(19^2+a^2) -21/(21^2+a^2) +27/(27^2+a^2) +29/(29^2+a^2) -\cdots\}$

$+\beta\{1/(1^2+a^2) +1/(7^2+a^2) -9/(9^2+a^2) -15/(15^2+a^2) +17/(17^2+a^2) +23/(23^2+a^2) -25/(25^2+a^2) -31/(31^2+a^2) +\cdots\}$

$=(\pi/4)ch(a\pi/8)/ch(a\pi/2)$　----⑧

さて、ここで A1～A4 を次のものとしよう。

$A1=1/(1^2+a^2) -15/(15^2+a^2) +17/(17^2+a^2) -31/(31^2+a^2) +33/(33^2+a^2) -47/(47^2+a^2)+\cdots$

$A2=3/(3^2+a^2) -13/(13^2+a^2) +19/(19^2+a^2) -29/(29^2+a^2) +35/(35^2+a^2) -45/(45^2+a^2)+\cdots$

$A3=5/(5^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+21/(21^2+a^2)-27/(27^2+a^2)+37/(37^2+a^2)-43/(43^2+a^2)+\cdots$

$A4=7/(7^2+a^2)-9/(9^2+a^2)+23/(23^2+a^2)-25/(25^2+a^2)+39/(39^2+a^2)-41/(41^2+a^2)+\cdots$

①と⑥～⑧を A1,A2,A3,A4 を用いて書き直すと、次となる。

$A1-A2+A3-A4=(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　　-----①

$A1+A2-A3-A4=\sqrt{2}\cdot(\pi/4)\mathrm{ch}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　　----⑥

$\alpha(A1+A4)+\beta(A2+A3)=(\pi/4)\mathrm{ch}(3a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　　----⑦

$-\alpha(A2+A3)+\beta(A1+A4)=(\pi/4)\mathrm{ch}(a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　　----⑧

これを A1,A2,A3,A4 の連立方程式として解いて、冒頭で示した４分身②～⑤を得る。
以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにしてＬ(1)類似香り式の４分身が得られた。美しい織物を分解していくようにして、連立方程式からきれいに得られる。

４分身で a＝0 とするとＬ(1)の４分身に一致する。よって、上記結果はゼータ分割をも包含する一般的なものとなっている。

数値計算も行ったが(a＝0.3, a＝10 で)、OK であった。②～⑤左辺の級数は右辺値に収束する。

再度、結果をまとめておこう。

****

＜L(1)類似香り式＞

$1/(1^2+a^2)-3/(3^2+a^2)+5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　　-----①

a は任意の実数。

このＬ(1)類似香り式①の４分身は、次の②～⑤(A1～A4)となる。
ここで、$\alpha=\sin(\pi/8)=\cos(3\pi/8)=(1/2)\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 、$\beta=\cos(\pi/8)=\sin(3\pi/8)=(1/2)\sqrt{2+\sqrt{2}}$。

＜L(1)類似香り式の４分割（４分身）＞

$A1=1/(1^2+a^2)-15/(15^2+a^2)+17/(17^2+a^2)-31/(31^2+a^2)+33/(33^2+a^2)-47/(47^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/8)\{1/2+(\sqrt{2}/2)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)+\alpha\cdot\mathrm{ch}(3a\pi/8)+\beta\cdot\mathrm{ch}(a\pi/8)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　　---②

$A2=3/(3^2+a^2)-13/(13^2+a^2)+19/(19^2+a^2)-29/(29^2+a^2)+35/(35^2+a^2)-45/(45^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/8)\{-1/2+(\sqrt{2}/2)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)+\beta\cdot\mathrm{ch}(3a\pi/8)-\alpha\cdot\mathrm{ch}(a\pi/8)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　　---③

$A3=5/(5^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+21/(21^2+a^2)-27/(27^2+a^2)+37/(37^2+a^2)-43/(43^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/8)\{1/2-(\sqrt{2}/2)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)+\beta\cdot\mathrm{ch}(3a\pi/8)-\alpha\cdot\mathrm{ch}(a\pi/8)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　　---④

$A4=7/(7^2+a^2)-9/(9^2+a^2)+23/(23^2+a^2)-25/(25^2+a^2)+39/(39^2+a^2)-41/(41^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/8)\{-1/2-(\sqrt{2}/2)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)+\alpha\cdot\mathrm{ch}(3a\pi/8)+\beta\cdot\mathrm{ch}(a\pi/8)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$　　---⑤

****

A1 -A2 +A3 -A4＝①が成り立っている。この美しい秩序を味わっていただきたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● A1 -A4＝B1、A2 -A3＝B2 とすると、B1 と B2 は、L(1)類似香り式の２分割（２分身）となる。

$B1=1/(1^2+a^2) -7/(7^2+a^2) +9/(9^2+a^2) -15/(15^2+a^2) +\cdots =(\pi/8)\{1+\sqrt{2}\cdot ch(a\pi/4)\}/ch(a\pi/2)$

$B2=3/(3^2+a^2) -5/(5^2+a^2) +11/(11^2+a^2) -13/(13^2+a^2) +\cdots=(\pi/8)\{-1+\sqrt{2}\cdot ch(a\pi/4)\}/ch(a\pi/2)$

これまでの流れからこのようになるが、その秩序に感動する。それは対称性から湧き上がってくる。
さらに B1-B2 とすると、L(1)類似香り式になる。

$1/(1^2+a^2) -3/(3^2+a^2) +5/(5^2+a^2) -7/(7^2+a^2) +9/(9^2+a^2) -11/(11^2+a^2) +\cdots =(\pi/4)/ch(a\pi/2)$

● 以前に発見した次の原理を中心に、ゼータ関数を研究している。

虚２次体ゼータは、サイン・フーリエ級数から生まれてくる。
実２次体ゼータは、コサイン・フーリエ級数から生まれてくる。

L(s)は、無数にある虚２次体ゼータの大将である。ζ(s)は、無数にある実２次体ゼータの大将である。

さて、すぐ上のサイン・フーリエ級数の母等式Ｉから出た B1,B2 を足し算すると、次となる。

$$1/(1^2+a^2) +3/(3^2+a^2) -5/(5^2+a^2) -7/(7^2+a^2) +9/(9^2+a^2) +11/(11^2+a^2) -13/(13^2+a^2) -15/(15^2+a^2)\cdots =(\pi\sqrt{2}/4)\cdot ch(a\pi/4)/ch(a\pi/2)$$

これは、虚２次体 $Q(\sqrt{-2})$ ゼータ $L2(s)$ $(1+1/3^s -1/5^s -1/7^s +\cdots)$ 類似の香り式といえる。

「サイン・フーリエ級数　⇒　虚２次体ゼータ」という図式である。上式で a=0 とすると、L2(s)の s=1 での特殊値 $\pi\sqrt{2}/4$ を得る。http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page161.htm

$L2(1)=1 +1/3 -1/5 -1/7 +1/9 +1/11 -1/13 -1/15 +\cdots=\pi\sqrt{2}/4$

● 母等式Ｉの対称性を見たい。

$$\sin x/(1^2+a^2) +3\sin 3x/(3^2+a^2) +5\sin 5x/(5^2+a^2) +\cdots=(\pi/4)ch(a(\pi/2-x))/ch(a\pi/2)$$

（$0<x<\pi$, a は任意の実数）

x,a をともに変数と見てそのセット(x,a)を考えたとき、以下の四つの変換操作に対して式は不変となる。

(x,a)⇒（x,a)、(x,a)⇒（x,−a)、(x,a)⇒（π−x,a)、(x,a)⇒（π−x,−a)

上の変換操作をそれぞれ左から E,A,B,C と定義しよう。言葉で述べれば、次となる。

E:「x を同じものに置き換える、且つ、a を同じものに置き換える。」(x,a)⇒（x,a)
A:「x を同じものに置き換える、且つ、a を−1 掛けたものに置き換える。」(x,a)⇒（x,−a)

B：「x をπから x を引いたものに置き換える、且つ、a を同じものに置き換える。」(x, a)⇒（π−x, a）
C：「x をπから x を引いたものに置き換える、且つ、a を−1 掛けたものに置き換える。」(x, a)⇒（π−x, −a）

これらの操作を元として持つ集合Ｇ＝{ E, A, B, C} を考えると、このＧは群を成す。積表は以下の通り。

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

これは、群論の本にある積表では、４元群Ｖという群に一致する。位数４の群は、巡回群か４元群Ｖかどちらかしかないことが知られているが、母等式Ｉは後者となった。４元群Ｖは可換群（アーベル群）である。
前回分も合わせると、母等式Ｉ, Ⅱとも、その対称操作に対応する群は４元群Ｖとなった。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.3.27 杉岡幹生

参考文献

・「やさしい群論入門」（成田進、藤永茂著、岩波書店）