＜ L(1)分割微分方程式の不変性、シンプル解での一般解構成 ＞

以前考察したL(1)分割微分方程式に関し、新たに気づいた点があったので、今回はそれを示したい。まずは（その１７２）での結果を簡略して示し（*****の間）、後半の＜考察＞でその気づき２点を示した。
なお、前回（その２３３）報告した新種の分身については、新種ではないと分かったので、それを最後のつぶやきの所で触れた。

****
L(1)分割微分方程式に対し（その１５７）で一般解を報告し、（その１５８）でその一般解からシンプルな形の特殊解を見出した。今回は、もう一つ別のシンプルな形の特殊解を構成する。シンプルな形の特殊解を短く“シンプル解”と呼ぶことにしたい。

なお、“L(1)分割微分方程式”は、L(1)分身を生み出す(解に持つ)固有方程式の多項式関数を解に持つ微分方程式である。したがって、それはL(s)ゼータにとって母なる根源的な微分方程式といえる。

L(1)は、L(s)ゼータの s＝1 のもので、次のものである。
L(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +1/9 −1/11 +1/13 −1/15 +・・＝π/4

L (1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \quad ------[1]$$

(n=・・−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3・・)

または

$$(x^2+1)^n \frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\} = n(1-n)y \quad ------[2]$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

●L(1)分割微分方程式[1]、[2]の一般解（n が任意の整数値での解）

・

・

n＝-7 の場合
$y=\{c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1)+c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)\}/(x^2+1)^7$

n＝-6 の場合
$y=\{c_1(x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1)+c_2(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)\}/(x^2+1)^6$

n＝-5 の場合 $y=\{c_1(x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1)+c_2(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)\}/(x^2+1)^5$

n＝-4 の場合 $y=\{c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)\}/(x^2+1)^4$

n＝-3 の場合 $y=\{c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)\}/(x^2+1)^3$

n＝-2 の場合 $y=\{c_1(x^2-2x-1)+c_2(x^2+2x-1)\}/(x^2+1)^2$

n＝-1 の場合 $y=\{c_1(x-1)+c_2(x+1)\}/(x^2+1)$

n＝0 の場合 $y=c_1\tan^{-1}(x)+c_2$

$n=1$ の場合　$y=c_1(x-1)+c_2(x+1)$

$n=2$ の場合　$y=c_1(x^2-2x-1)+c_2(x^2+2x-1)$

$n=3$ の場合　$y=c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)$

$n=4$ の場合　$y=c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)$

$n=5$ の場合　$y=c_1(x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1)+c_2(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)$

$n=6$ の場合　$y=c_1(x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1)+c_2(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)$

$n=7$ の場合　$y=c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1)$

$+c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)$

・

・

ここで、c_1 と c_2 は任意の定数である。

[L(1)分割微分方程式におけるシンプルな表現の特殊解①]

一般解において、$c_1=c_2=1$ として得られた特殊解を示す。（微分方程式が線形だから全体に掛かる 2 は省いた）

・

・

$n=-7$ の場合　$y=(x^7-21x^5+35x^3-7x)/(x^2+1)^7$

$n=-6$ の場合　$y=(x^6-15x^4+15x^2-1)/(x^2+1)^6$

$n=-5$ の場合　$y=(x^5-10x^3+5x)/(x^2+1)^5$

$n=-4$ の場合　$y=(x^4-6x^2+1)/(x^2+1)^4$

$n=-3$ の場合　$y=(x^3-3x)/(x^2+1)^3$

$n=-2$ の場合　$y=(x^2-1)/(x^2+1)^2$

$n=-1$ の場合　$y=x/(x^2+1)$

$n=0$ の場合　$y=1$

$n=1$ の場合　$y=x$

$n=2$ の場合　$y=x^2-1$

$n=3$ の場合　$y=x^3-3x$

$n=4$ の場合　$y=x^4-6x^2+1$

$n=5$ の場合　$y=x^5-10x^3+5x$

$n=6$ の場合　$y=x^6-15x^4+15x^2-1$

$n=7$ の場合　$y=x^7-21x^5+35x^3-7x$

・

・

[L(1)分割微分方程式におけるシンプルな表現の特殊解②]

一般解において、$c_1=-1$, $c_2=1$ として得られた特殊解を示す。（微分方程式が線形だから全体に掛かる 2 は省いた）

・

・

$n=-7$ の場合　$y=(7x^6-35x^4+21x^2-1)/(x^2+1)^7$

$n=-6$ の場合　$y=(6x^5-20x^3+6x)/(x^2+1)^6$

$n=-5$ の場合　$y=(5x^4-10x^2+1)/(x^2+1)^5$

$n=-4$ の場合　$y=(4x^3-4x)/(x^2+1)^4$

n＝-3 の場合　$y=(3x^2-1)/(x^2+1)^3$
n＝-2 の場合　$y=2x/(x^2+1)^2$
n＝-1 の場合　$y=1/(x^2+1)$
n＝0 の場合　$y=0$
n＝1 の場合　$y=1$
n＝2 の場合　$y=2x$
n＝3 の場合　$y=3x^2-1$
n＝4 の場合　$y=4x^3-4x$
n＝5 の場合　$y=5x^4-10x^2+1$
n＝6 の場合　$y=6x^5-20x^3+6x$
n＝7 の場合　$y=7x^6-35x^4+21x^2-1$
・
・

＜L(1)分割微分方程式の解 $L_n(x)$ に対する漸化式＞

$$L_{n+2}(x)-2xL_{n+1}(x)+(x^2+1)L_n(x)=0 \quad \text{-----[3]}$$

(n＝・・, -3-, 2, -1, 0, 1, 2, 3・・)

上記の微分方程式の解の多項式間に成立する漸化式である。
例えば、$L_4(x)=x^4-6x^2+1$、$L_3(x)=x^3-3x$、$L_2(x)=x^2-1$ でこの漸化式が成立することを確認いただきたい。

このように２種類のシンプル解①、②が得られた。

漸化式[3]は、パスカル三角形解（一般解の c_1 側基本解）で成り立つものとしていたが、もう一つのパスカル三角形解（一般解の c_2 側基本解）でも成り立つと分かった。よってシンプル解①、②でも成り立っている。

$$L_{n+2}(x)-2xL_{n+1}(x)+(x^2+1)L_n(x)=0 \quad \text{-----[3]}$$

したがって、一般解でもこの漸化式は成り立つ。
以上。
****

以上が２年前に得ていた結果である。今回、新たに気づいた点を以下の＜考察＞に述べる。

＜考察＞

気づいたことは二つある。順番に述べる。

まず、L(s)分割微分方程式は、x＝-t という変数変換に対して、方程式の形が変わらないことに気づいた。
つまり、変数変換 x＝-t に対し、L(1)分割微分方程式は不変となる。以下の通り。「L(1)分割微分方程式は鏡映変換に対し不変である」とも言えるかもしれない。

$$(t^2+1)y'' - 2(n-1)ty' + n(n-1)y = 0 \qquad \text{------[B1]}$$

(n=・・-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3・・)

または

$$(t^2+1)^n \frac{d}{dx}\left\{(t^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dt}\right\} = n(1-n)y \qquad \text{-------[B2]}$$

これらは、上方の[1],[2]と全く同じである。過程は略すが、dx=-dt, dy/dx=-dy/dt などに注意して[1],[2]を変形していくと、この[B1],[B2]に到達する。

この「x=-t で不変」という事実から「基本解の一つが分かったら、もう一つの基本解も簡単に分かる」ということになる。事実、一般解を構成する基本解の一つ(c1 側)に対し、x を-x と置き換えることによって、もう一方の基本解(c2 側)が出る。

例えば、n=3 の場合はそのようになっている。

n=3 の場合　$y=c_1(x^3 -3x^2 -3x +1) +c_2(x^3 +3x^2 -3x -1)$

他の n の場合もそうなっているので確認いただきたい。L(1)分割微分方程式の構造は、シンプルであり、大変きれいである。

もう一つ気づいた点がある。
それは、シンプル解を基本解として採用でき、それでもって一般解を構成できるということである。

例えば、n=3 の一般解を見よう。次である。

n=3 の場合　$y=c_1(x^3 -3x^2 -3x +1) +c_2(x^3 +3x^2 -3x -1)$

この $y=c_1(x^3 -3x^2 -3x +1) +c_2(x^3 +3x^2 -3x -1)$ は、次のように変形できる。

$y=c_1(x^3 -3x^2 -3x +1) +c_2(x^3 +3x^2 -3x -1)$
$=(c1+c2)(x^3 -3x) +(-c1+c2)(3x^2 -1)$
$=A1(x^3 -3x) +A2(3x^2 -1)$

ここで、c1+c2=A1、-c1+c2=A2 とした。このように新たな任意定数 A1, A2 を用いて、二組のシンプル解で一般解を表現できることになる。

よって、“特殊解”としたシンプル解は、基本解となる。一般解をシンプル解で書き換える作業は、次回以降としたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●前回（その２３３）報告した新種の分身については、新種ではないと分かった。

じつは、新種と思ったそれらの分身は、これまでに出した分身を組み合わせると出ると気づいた。新種とした２分身は、L(1)５分割の４分身に対し、二つずつ足せば出る。また、新種とした３分身は、L(1)７分割の６

分身たちに対し、二つずつ足せば出る。よって、以前に得られていた分身から構成されるので、それらは新種とは言えない。詳細は略すが、概要は以上となる。訂正とさせていただきます。

●「シンプル解で一般解を構成できる」というこんな基本的なことに今頃、気付いたのは、ふしぎである。

どうして２年前に気付かなかったのか？

上方の「L(1)分割微分方程式[1]、[2]の一般解（n が任意の整数値での解)」での解が、パスカルの三角形を構成していて、その美しさに意識がいっていたためか？よくわからないが。

そのパスカル型の解の形より、シンプル解の方がより“シンプル”であり、私はよい感じを受ける。

●パスカル型の解では、<u>微分したら次数が一つ下の解が得られる</u>。私はそのふしぎに魅了されてきた。

シンプル解でもその性質は引きつがれている。例えば、n＝7 の解を微分したら n=6 の解が得られる。

n＝6 の場合　$y=6x^5-20x^3+6x$

n＝7 の場合　$y=7x^6-35x^4+21x^2-1$

このように n=7 の解を微分すると $y'=7(6x^5-20x^3+6x)$ となって、n=6 の解になる！ 線形微分方程式なので 7() の 7 は省ける。このように <u>n=k の解を微分すると n=k-1 の解が得られる</u>。これは、n が<u>負の場合でも</u>成り立っている。

ちなみに、ζ(2)分割微分方程式の解では、このような規則はない。

● “鏡映”の関係は強力である。どうして鏡映の構造があると、こんなにも美しいことになるのか。

L(s)の世界は、ζ(s)の世界より、シンプルできれいである。それは、リーマン予想でもそうである。L(s)は、ζ(s)より対称性が勝っている気がする。

● ζ(2)分割微分方程式に関しては、今回見たような不変性はないだろうか？　一見してなさそうだが、どうなのか。

ζ(2) n 分割の微分方程式

$$2x(x-1)y''-\{(4n-3)x-(4n-2)\}y'+n(2n-1)y=0 \qquad \text{----①}$$

(n=1, 2, 3, ・・)

または

$$x\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}\left\{x\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}(y/x^n)\right\}=-n^2(y/x^n) \qquad \text{----②}$$

①と②は本質的に同じ微分方程式である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.2.6　杉岡幹生