＜ L(s)とξ(s)のリーマン予想におけるグラフの違い＞

―― 行儀のよいL(s)、行儀の悪いξ(s) ――

L(s)とξ(s)のリーマン予想（鏡映型）をさらに調べる。両者のグラフを調べていて、面白い事実に気づいた。結論から述べると、その事実とは以下である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(s)の単一関数G(x)の曲線の谷(バレイ)はすべてx軸に接するが、ξ(s)の単一関数F(x)の曲線の谷は接しないものがある。

あるいは、次のようにも言い換えることができる。

L(s)の単一関数G(x)のグラフの谷はすべて非自明な零点を与えるが、ξ(s)の単一関数F(x)のグラフの谷は非自明な零点とならないものがある。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

もっと簡単に言ってしまうと、L(s)のグラフはきれいであり、ξ(s)のグラフはきれいでない。L(s)は行儀がよい、ξ(s)は行儀がよくない、といえそうだ。

さてL(s)、ξ(s)のリーマン予想と本質的に等しい予想B-3と予想A-3を再掲しよう。後者は（その２０５）あたりから。（log1はゼロだが、log1としておいている）

予想B-3（L(s)リーマン予想と同値）

cを0＜c＜1の実数とする。次のxに関する二つの方程式を考える。
この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのはcが1/2のときのみであろう。

$$(1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log1+\pi/4)-(1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log3+\pi/4)+(1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log5+\pi/4)-(1/7^c)\cdot\cos(x\cdot\log7+\pi/4)+(1/9^c)\cdot\cos(x\cdot\log9+\pi/4)-(1/11^c)\cdot\cos(x\cdot\log11+\pi/4)+\cdots=0$$

$$(1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log1-\pi/4)-(1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log3-\pi/4)+(1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log5-\pi/4)-(1/7^c)\cdot\cos(x\cdot\log7-\pi/4)+(1/9^c)\cdot\cos(x\cdot\log9-\pi/4)-(1/11^c)\cdot\cos(x\cdot\log11-\pi/4)+\cdots=0$$

予想 A-3 （ζ(s)リーマン予想と同値）

c を 0 < c < 1 の実数とする。次の x に関する二つの方程式を考える。
この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのは c が 1/2 のときのみであろう。

$$(1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log1+\pi/4)-(1/2^c)\cdot\cos(x\cdot\log2+\pi/4)$$
$$+(1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log3+\pi/4)-(1/4^c)\cdot\cos(x\cdot\log4+\pi/4)$$
$$+(1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log5+\pi/4)-(1/6^c)\cdot\cos(x\cdot\log6+\pi/4)$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad=0$$

$$(1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log1-\pi/4)-(1/2^c)\cdot\cos(x\cdot\log2-\pi/4)$$
$$+(1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log3-\pi/4)-(1/4^c)\cdot\cos(x\cdot\log4-\pi/4)$$
$$+(1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log5-\pi/4)-(1/6^c)\cdot\cos(x\cdot\log6-\pi/4)$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad=0$$

まずＬ(s)の予想 B-3 に着目しよう。

前回の（その２２７）でも見たが、予想 B-3 の二式で c を 1/2 とした場合の左辺をそれぞれ次のように $g_1(x)$、$g_2(x)$ とおく。

$$g_1(x)=(1/\sqrt{1})\cdot\cos(x\cdot\log1+\pi/4)-(1/\sqrt{3})\cdot\cos(x\cdot\log3+\pi/4)$$
$$+(1/\sqrt{5})\cdot\cos(x\cdot\log5+\pi/4)-(1/\sqrt{7})\cdot\cos(x\cdot\log7+\pi/4)$$
$$+(1/\sqrt{9})\cdot\cos(x\cdot\log9+\pi/4)-(1/\sqrt{11})\cdot\cos(x\cdot\log11+\pi/4)$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

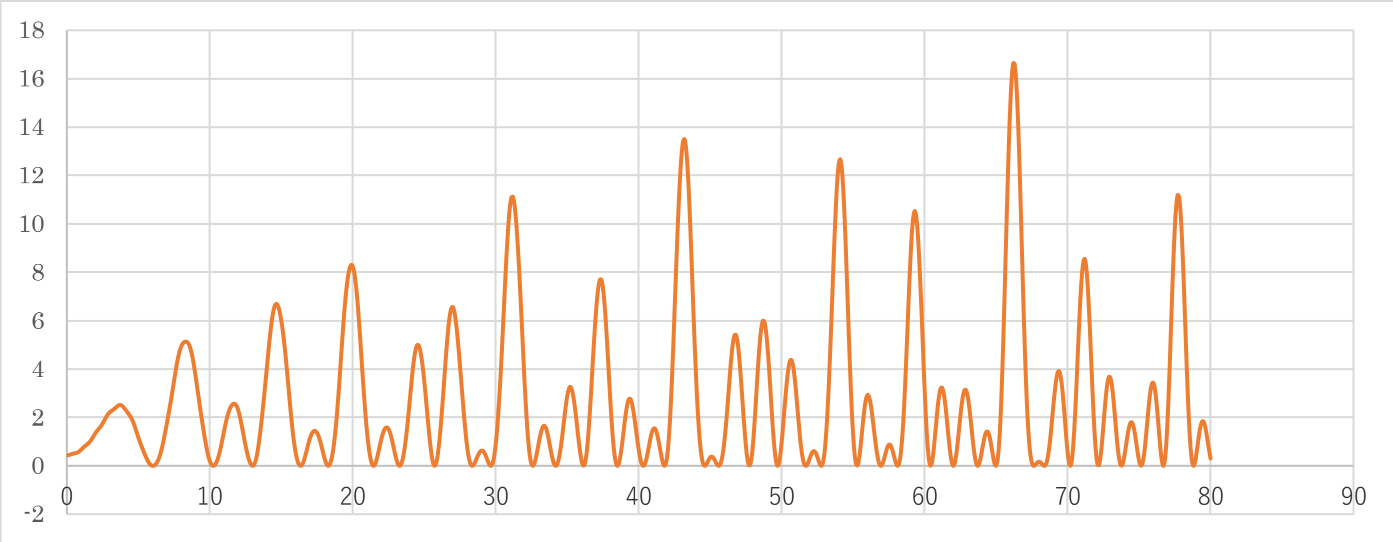
$$g_2(x)=(1/\sqrt{1})\cdot\cos(x\cdot\log1-\pi/4)-(1/\sqrt{3})\cdot\cos(x\cdot\log3-\pi/4)$$
$$+(1/\sqrt{5})\cdot\cos(x\cdot\log5-\pi/4)-(1/\sqrt{7})\cdot\cos(x\cdot\log7-\pi/4)$$
$$+(1/\sqrt{9})\cdot\cos(x\cdot\log9-\pi/4)-(1/\sqrt{11})\cdot\cos(x\cdot\log11-\pi/4)$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ここで、Ｌ(s)の単一関数としてＧ(x)を次のように定義する。

$$G(x)=g_1(x)^2+g_2(x)^2$$

このＧ(x)のグラフを前回は 0～20 の x の範囲で描いた。範囲を広げて 0～80 の範囲で描くと、次のようになる。

注記：$g_1(x)$、$g_2(x)$ の右辺の級数の項は 1000 項まで計算。x のピッチは 0.1。Excel でマクロプログラムを組んで計算した。



この横軸 0〜80 の範囲で出現する谷（バレイ）がすべて x 軸に接していることがわかるであろう。なお、グラフのマイナス側は、y 軸に対してプラス側の鏡映となっている。

G(x)は、このように無数に x 軸と接するが、その接点の x 座標がすべての L(s)の非自明な零点$\pm\beta_1$, $\pm\beta_2$、$\pm\beta_3$・・を与える。方程式 G(x)＝0 は、L(s)非自明な零点（1/2+i・β）の全てのβを解(実解)にもつ（リーマン予想と同値）。

L(s)の非自明な零点（1/2+i・β）の最初の１０点は以下の通り。

6.02094890469759665490
10.24377030416655455214
12.98809801231242250745
16.34260710458722219498
18.29199319612353483853
21.45061134398346049720
23.27837652045953153182
25.72875642508872756727
28.35963434302532778565
29.65638401459315272181

次に、予想 A-3 に対しても全く同様に行う。
予想 A-3 の二式で c を 1/2 とした場合の左辺をそれぞれ次のように $f_1(x)$、$f_2(x)$とおく。

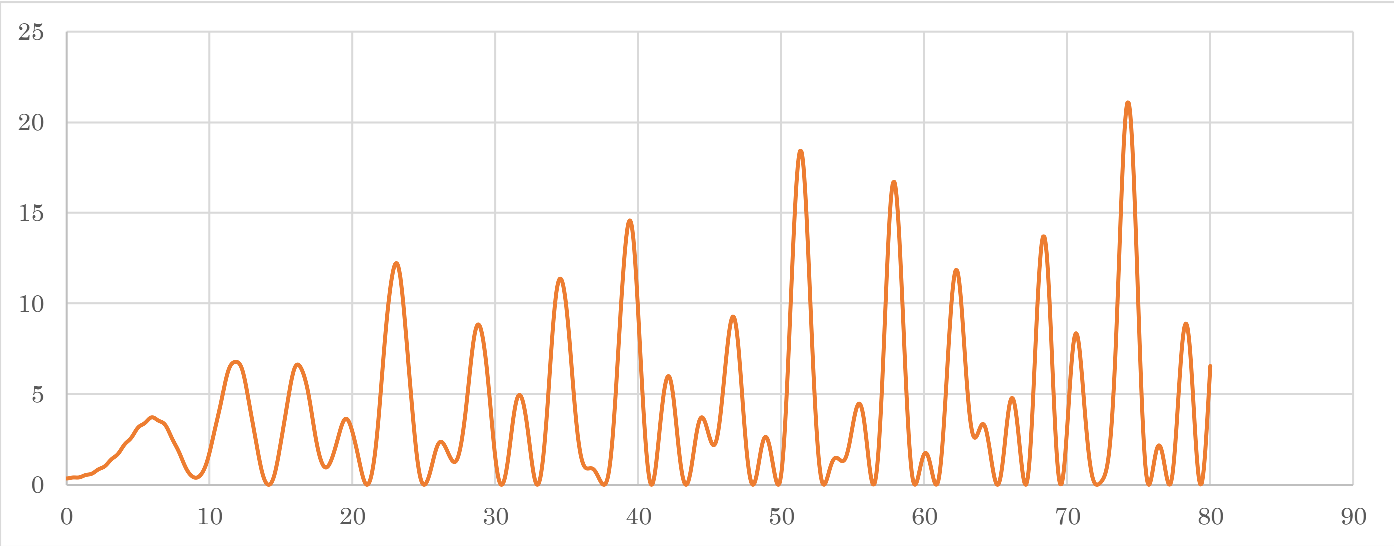
$$
\begin{aligned}
f_1(x) = &(1/\sqrt{1})\cdot\cos(x\cdot\log 1+\pi/4) - (1/\sqrt{2})\cdot\cos(x\cdot\log 2+\pi/4)\\
&+ (1/\sqrt{3})\cdot\cos(x\cdot\log 3+\pi/4) - (1/\sqrt{4})\cdot\cos(x\cdot\log 4+\pi/4)\\
&+ (1/\sqrt{5})\cdot\cos(x\cdot\log 5+\pi/4) - (1/\sqrt{6})\cdot\cos(x\cdot\log 6+\pi/4)\\
&+ \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(x) = &(1/\sqrt{1})\cdot\cos(x\cdot\log 1-\pi/4) - (1/\sqrt{2})\cdot\cos(x\cdot\log 2-\pi/4)\\
&+ (1/\sqrt{3})\cdot\cos(x\cdot\log 3-\pi/4) - (1/\sqrt{4})\cdot\cos(x\cdot\log 4-\pi/4)\\
&+ (1/\sqrt{5})\cdot\cos(x\cdot\log 5-\pi/4) - (1/\sqrt{6})\cdot\cos(x\cdot\log 6-\pi/4)\\
&+ \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

ここで、ξ(s)の単一関数としてF(x)を次のように定義する。

$$F(x)=f_1(x)^2+f_2(x)^2$$

この関数F(x)のグラフを横軸0～80の範囲で描くと、次のようになる。
注記：$f_1(x)$、$f_2(x)$の右辺の級数の項は1000項まで計算。xのピッチは0.1。



この横軸0～80の範囲においてx軸に接していない谷が所々あることが分かる。なお、グラフのマイナス側は、y軸に対してプラス側の鏡映となっている。

F(x)は、このように無数にx軸と接するが、その接点のx座標がすべてのξ(s)の非自明な零点$\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$、$\pm\alpha_3$・・を与える。方程式F(x)=0は、ξ(s)の非自明な零点（1/2+i・α）の全てのαを解(実解)にもつ（リーマン予想と同値）。

ξ(s)の非自明な零点（1/2+i・α）の最初の１０点は以下の通り。

14.134725141734693790 46
21.022039638771554992 63
25.010857580145688763 21
30.424876125859513210 31
32.935061587739189690 66
37.586178158825671257 22
40.918719012147495187 40
43.327073280914999519 50
48.005150881167159727 94
49.773832477672302181 92

以上。

グラフを比べると、一見して、L(s)の方はきれいであり、ξ(s)はきれいでないといえるだろう。谷が接するか否かの視点で見ると、決定的に違っている。次のようになっている。

・L(s)の G(x)曲線 ⇒全ての谷が x 軸に接している。
・ξ(s)の F(x)曲線 ⇒x 軸に接しない谷がある。

じつは x の範囲を広げて 0～160 でも確認したが、上記は成り立っている。無限に範囲を広げられないので、予想でしかないが、どこまでも成り立っているように思われる。

これはリーマン予想において、重大な何かを示唆しているように思う。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●グラフから、L(s)はきれいな構造をしている様子が感じ取れる。ξ(s)は複雑な要素を持ち合わせているようである。これは私のゼータの研究で感じてきたことでもある。ξ(s)に比べ、L(s)は構造がすっきりしていてきれいである。

単なる勘でしかないが、リーマン予想は、L(s)の方が解きやすいように思われる。

●話は変わって、高瀬正仁氏のサイトの数学史をほぼ読み終えた。２回目を読み直しているとき、数論に関するある話が気になった。

それは、

４で割って１余る素数は２個の平方数の和で表される。

４で割って３余る素数はそうはならない。

というフェルマーが、直角三角形の基本定理と呼んだ有名な定理のことである。

私は、これはフェルマーが発見したものだと思い込んでいた。普通の数学史ではそう書かれているので、私以外の人もみんなそう信じているに違いない。

ところが、真相はどうもちがうようである。ディオファントスはその事実に気づいていて（はっきり認識していた）、その認識に立って著書で論を展開しているようである。

http://reuler.blog108.fc2.com/blog-category-35-5.html
『フェルマの数論 26　「二つの平方数の和に分けられる平方数」に関心を寄せる』

これには、まったく驚いた。フェルマーは、ディオファントスの著作を勉強しているときに、ディオファントスの意図に気づき、その意味をくみ取って、明快な言葉で表現し直したというのが本当の所のような気がする。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.12.26　杉岡幹生