＜ L(s)リーマン予想と同値の予想 B-3 鏡映型のグラフ No.2＞

（その２２６）の続きで、L(s)リーマン予想 B-3（鏡映型）のグラフをさらに調べたい。

前回は、L(s)の非自明な零点（1/2+i・β）の最初の零点を与えるグラフを描いたが、もう少し範囲を広げて最初から５点までを与えるグラフを描いたので報告する。

さらに、L(s)リーマン予想を単一の方程式（関数）でもっと簡潔に表せることに気づいたので紹介したい。それは最後に述べた。

まずは、予想の B-1 と B-3 を掲げる。（log1 はゼロだが、そのままおいている。）

予想 B-1　（L(s)リーマン予想と同値）

c を 0＜c＜1 の実数とする。次の x に関する二つの方程式を考える。
この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのは c が 1/2 のときのみであろう。

$$\cos(x\cdot\log 1)/1^c - \cos(x\cdot\log 3)/3^c + \cos(x\cdot\log 5)/5^c - \cos(x\cdot\log 7)/7^c + \cdots = 0$$

$$\sin(x\cdot\log 1)/1^c - \sin(x\cdot\log 3)/3^c + \sin(x\cdot\log 5)/5^c - \sin(x\cdot\log 7)/7^c + \cdots = 0$$

予想 B-3　（L(s)リーマン予想と同値）

c を 0＜c＜1 の実数とする。次の x に関する二つの方程式を考える。
この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのは c が 1/2 のときのみであろう。

$$\begin{aligned}&(1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log 1+\pi/4) - (1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log 3+\pi/4)\\&\quad + (1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log 5+\pi/4) - (1/7^c)\cdot\cos(x\cdot\log 7+\pi/4)\\&\quad\quad + (1/9^c)\cdot\cos(x\cdot\log 9+\pi/4) - (1/11^c)\cdot\cos(x\cdot\log 11+\pi/4)\\&\quad\quad\quad + \cdots\cdots = 0\end{aligned}$$

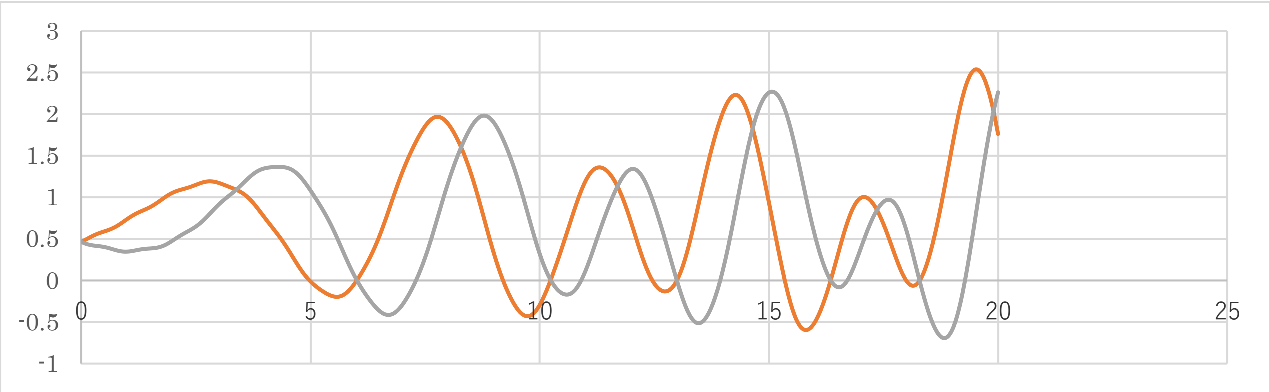
$$\begin{aligned}&(1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log 1-\pi/4) - (1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log 3-\pi/4)\\&\quad + (1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log 5-\pi/4) - (1/7^c)\cdot\cos(x\cdot\log 7-\pi/4)\\&\quad\quad + (1/9^c)\cdot\cos(x\cdot\log 9-\pi/4) - (1/11^c)\cdot\cos(x\cdot\log 11-\pi/4)\\&\quad\quad\quad + \cdots\cdots = 0\end{aligned}$$

この二予想は本質的に同値である。とくに予想 B-3 は両式が鏡映の関係になっていて、きわめて重要である。予想 B-3 で c=1/2 とした場合の上の方の式(左辺)を $g_1(x)$、下の方の式(左辺)を $g_2(x)$ とした場合、その曲線のグラフは y 軸に関して対称（鏡映）になっている。すなわち、$g_1(x)=g_2(-x)$ である。

$g_1(x)=(1/\sqrt{1})\cdot\cos(x\cdot\log 1+\pi/4)-(1/\sqrt{3})\cdot\cos(x\cdot\log 3+\pi/4)$
$+(1/\sqrt{5})\cdot\cos(x\cdot\log 5+\pi/4)-(1/\sqrt{7})\cdot\cos(x\cdot\log 7+\pi/4)$
$+(1/\sqrt{9})\cdot\cos(x\cdot\log 9+\pi/4)-(1/\sqrt{11})\cdot\cos(x\cdot\log 11+\pi/4)$
$+\cdots\cdots$

$g_2(x)=(1/\sqrt{1})\cdot\cos(x\cdot\log 1-\pi/4)-(1/\sqrt{3})\cdot\cos(x\cdot\log 3-\pi/4)$
$+(1/\sqrt{5})\cdot\cos(x\cdot\log 5-\pi/4)-(1/\sqrt{7})\cdot\cos(x\cdot\log 7-\pi/4)$
$+(1/\sqrt{9})\cdot\cos(x\cdot\log 9-\pi/4)-(1/\sqrt{11})\cdot\cos(x\cdot\log 11-\pi/4)$
$+\cdots\cdots$

　これら二関数について、Excel で 1000 項まで計算して重ね書きしたグラフを示す。x は 0～20 の範囲という正の範囲のみで描いた（負の範囲はその鏡映）。x のピッチは 0.1。オレンジ色⇒$g_1(x)$、灰色⇒$g_2(x)$



　この 1000 項までの計算で、見た目にほとんど最終形に近い形になっていると考えられる。L(s)の非自明な零点（1/2+i・β）の最初の５点のβは、以下となる。

6.02094890469759665490
10.24377030416655455214
12.98809801231242250745
16.34260710458722219498
18.29199319612353483853

　上記グラフから、x 軸上での両曲線の交点（共通解）が上記５点となっている。その辺りで交わっていることがわかるであろう。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● やはり上記グラフは興味深い形をしている。
　$g_1(x)$と$g_2(x)$は形が似ているが、位相がずれていてそのずれによって x 軸上での交点が生じている。リーマン予想は、c が 1/2 のときのみ x 軸上で交点があり、1/2 以外のときは x 軸上で交点が一切ない！と主張している。そして交点がある場合は無限個ある・・

● $g_1(x)=0$ と $g_2(x)=0$ の共通解が、L(s)非自明な零点のβを与える。共通解以外の解を見た場合、グラフからもわかるようにガラクタ解がある。ガラクタ解は共通解でない解である。ガラクタ解もたくさんある。

● $g_1(x)=0$ と $g_2(x)=0$ を、解を使って表すと、それぞれ次のようになっている。

$$\{(1-x^2/\beta_1^2)(1-x^2/\beta_2^2)(1-x^2/\beta_3^2)\cdot\cdot\}$$
$$\times[\{(1-x^2/a_1^2)(1-x^2/a_2^2)(1-x^2/a_3^2)\cdot\cdot\}-\{x(1-x^2/b_1^2)(1-x^2/b_2^2)(1-x^2/b_3^2)\cdot\cdot\}]=0$$

$$\{(1-x^2/\beta_1^2)(1-x^2/\beta_2^2)(1-x^2/\beta_3^2)\cdot\cdot\}$$
$$\times[\{(1-x^2/a_1^2)(1-x^2/a_2^2)(1-x^2/a_3^2)\cdot\cdot\}+\{x(1-x^2/b_1^2)(1-x^2/b_2^2)(1-x^2/b_3^2)\cdot\cdot\}]=0$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$・・が L(s) 非自明な零点に対応し、$g_1(x)=0$ と $g_2(x)=0$ の共通解である。
ややこしいのだが、a_1, a_2, a_3・・は冒頭の予想 B-1 での上の方の式の解であり、b_1, b_2, b_3・・は予想 B-1 での下の方の式の解である（これらは予想 B-1 でのガラクタ解）。

予想 B-3 でのガラクタ解は、上記方程式のそれぞれの[ ]に対応した方程式[ ]=0 の解になると考えられる。また上記の式の形からも $g_1(x)$ と $g_2(x)$ が鏡映の関係になっていることがわかる。$g_1(x)=g_2(-x)$ から。

● たった一つの関数で、L(s) リーマン予想は表現できないだろうか？

それは簡単である。$g_1(x)$ と $g_2(x)$ をそれぞれ二乗して足した関数 $G(x)=g_1(x)^2+g_2(x)^2$ を作ればよい。

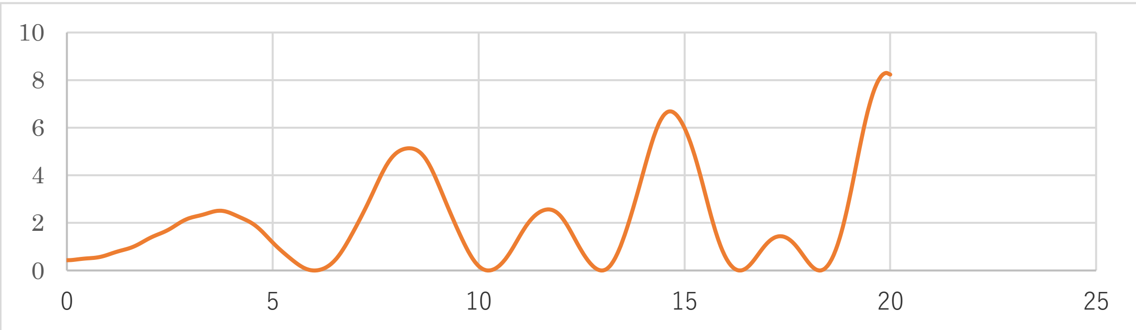
この関数は無数に x 軸と接するが、その接点の x 座標がすべての L(s) 非自明な零点 $\pm\beta_1, \pm\beta_2$、$\pm\beta_3$・・を与える。だから、予想 B-4 などとして、

「G(x)＝0 が実解をもつのは、c＝1/2 のときのみ」

とすればよい。

方程式 G(x)＝0 は、L(s) 非自明な零点（1/2+i・β）の全ての β を解(実解)にもつ。

G(x)＝0 ではガラクタ解というややこしいものは登場しない。一番大事な β のみ解に持つ。
$G(x)=g_1(x)^2+g_2(x)^2$ のグラフは以下のようになる（1000 項まで計算)。接点が非自明な零点の β である。



● 一つ上の発想は容易に思いつくことで別段どうというほどのことではない。実際１３年前にも ζ(s) で同じことを考えていた。⇒クラーク彗星　その２やその３

（注記）１３年前も同値命題としてのリーマン予想をいろいろな記号で表現していた。クラーク彗星で“予想 B-3”の表現もしているが、それは当時の ζ(s) 予想の記法であって、最近の L(s) の予想とは関係ないので注意されたい。

しかし $g_1(x)^2+g_2(x)^2$ の形は式が複雑になって考察がむずかしい（グラフはわかりやすいが)。

私はばくぜんと「リーマン予想をたった一つの関数（一つの方程式）で表す場合、もっと簡単な形で表せないか？」とずっと思ってきた。

●ひょんなことから、リーマン予想をもっと簡単な関数（or 方程式）で表現できると思いついた。

それは $g_1(x)$ と $g_2(x)$ の掛け算、すなわち $g_1(x)\cdot g_2(x)$ を見ればよい。$g_1(x)\cdot g_2(x)$ という関数を $G(x)_m$ で表そう。

$$G(x)_m = g_1(x)\cdot g_2(x)$$

この関数 $G(x)_m$ で $L(s)$ リーマン予想を表現できるのである！(二つ上で“予想 B-4”はもうとったので) 予想 B-5 として表現しておこう。

予想 B-5 （L(s)リーマン予想と同値）

c を 0＜c＜1 の実数とする。x に関する関数 $g_1(x)$ と $g_2(x)$ をそれぞれ以下のように定義する。
この二関数を掛け算した関数 $G_m(x) = g_1(x)\cdot g_2(x)$ が x 軸に接するのは、c が 1/2 のときのみであろう。

$$\begin{aligned} g_1(x) =& (1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log 1+\pi/4) - (1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log 3+\pi/4) \\ &+ (1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log 5+\pi/4) - (1/7^c)\cdot\cos(x\cdot\log 7+\pi/4) \\ &+ (1/9^c)\cdot\cos(x\cdot\log 9+\pi/4) - (1/11^c)\cdot\cos(x\cdot\log 11+\pi/4) \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(x) =& (1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log 1-\pi/4) - (1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log 3-\pi/4) \\ &+ (1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log 5-\pi/4) - (1/7^c)\cdot\cos(x\cdot\log 7-\pi/4) \\ &+ (1/9^c)\cdot\cos(x\cdot\log 9-\pi/4) - (1/11^c)\cdot\cos(x\cdot\log 11-\pi/4) \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned}$$

方程式の解の視点から表現すると、次の予想 B-6 ができる。

予想 B-6 （L(s)リーマン予想と同値）

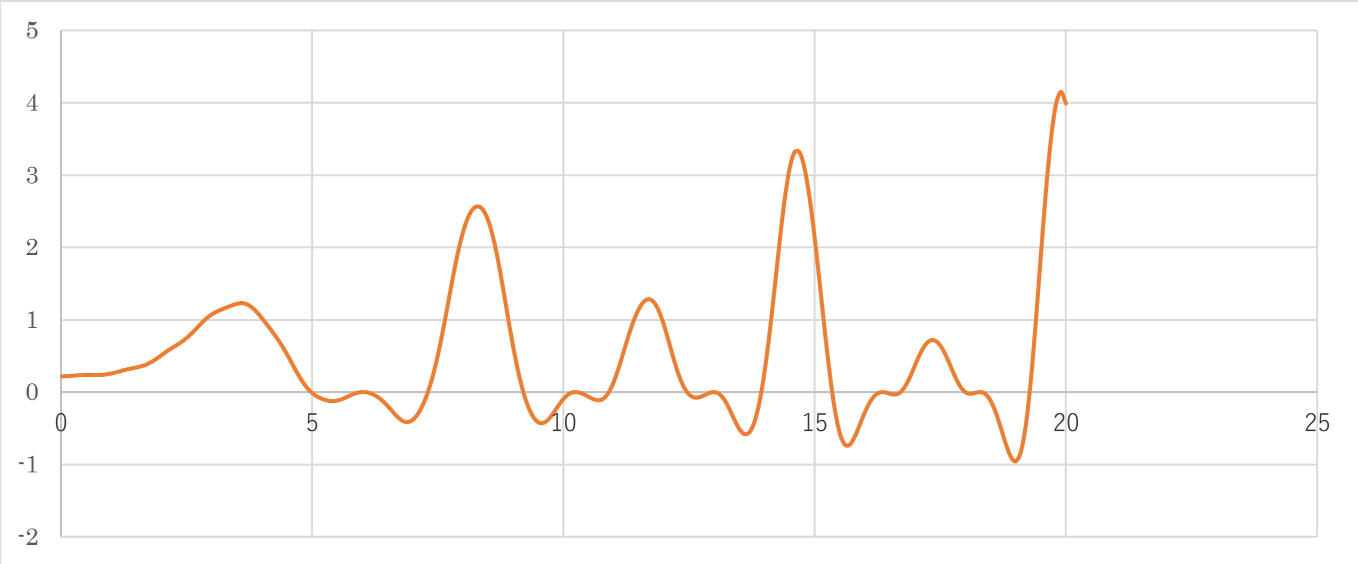
c を 0＜c＜1 の実数とする。x に関する関数 $g_1(x)$ と $g_2(x)$ をそれぞれ以下のように定義する。
この二関数を掛け算してそれをゼロとした方程式 $g_1(x)\cdot g_2(x)=0$ が重解を持つのは、c が 1/2 のときのみであろう。

$$\begin{aligned} g_1(x) =& (1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log 1+\pi/4) - (1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log 3+\pi/4) \\ &+ (1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log 5+\pi/4) - (1/7^c)\cdot\cos(x\cdot\log 7+\pi/4) \\ &+ (1/9^c)\cdot\cos(x\cdot\log 9+\pi/4) - (1/11^c)\cdot\cos(x\cdot\log 11+\pi/4) \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(x) =& (1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log 1-\pi/4) - (1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log 3-\pi/4) \\ &+ (1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log 5-\pi/4) - (1/7^c)\cdot\cos(x\cdot\log 7-\pi/4) \\ &+ (1/9^c)\cdot\cos(x\cdot\log 9-\pi/4) - (1/11^c)\cdot\cos(x\cdot\log 11-\pi/4) \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned}$$

接点というのは、方程式では重解となるから、上のようになる。

● 予想 B-5 での関数 $G_m(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$ の c＝1/2 の場合のグラフを描いたので紹介しておこう。
$g_1(x)$, $g_2(x)$ の 1000 項分を掛け算したもので、ピッチは 0.1 で描いたもの。



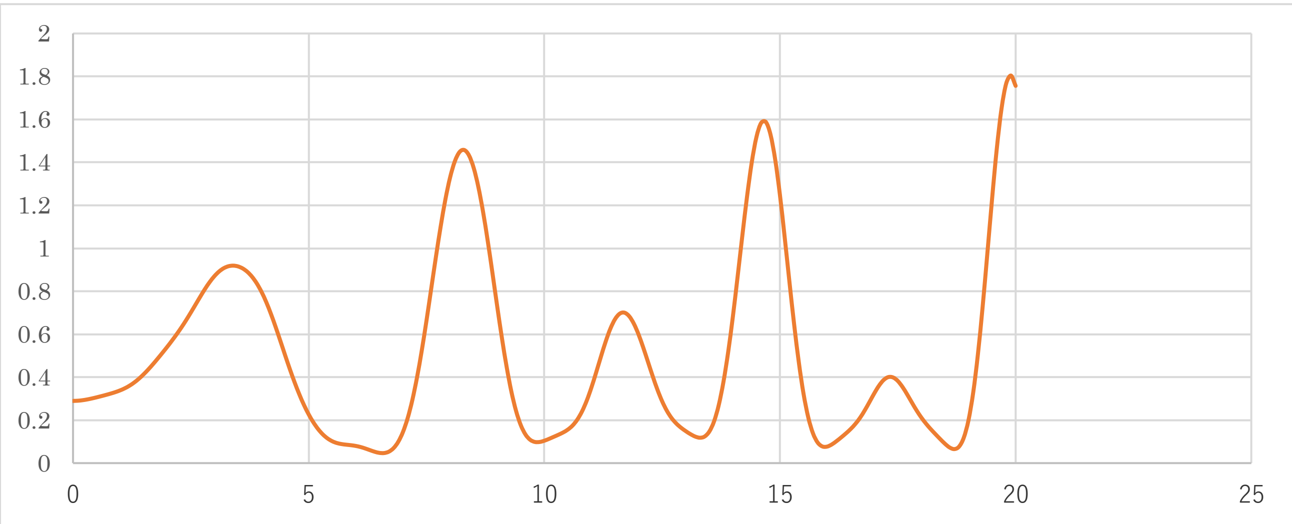
L(s)非自明な零点（1/2+i・β）の最初の５点で、x 軸に接しているのがわかるだろう。

6.0209489046975965490
10.2437703041665545214
12.98809801231242250745
16.34260710458722219498
18.29199319612353483853

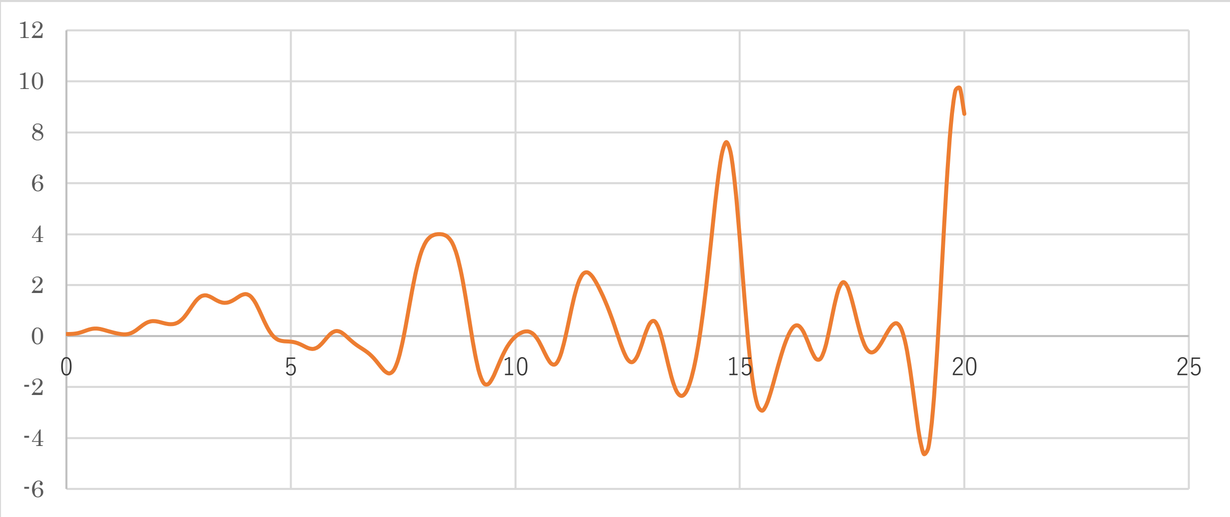
L(s)リーマン予想は、このようなに x 軸との接点として表現できるのである！　大ピークの両脇にある小ピークで接している。興味深いではないか。

参考までに、c＝0.9 と c＝0.2 のときのグラフも以下載せておく(ただし 100 項までの結果)。
注記：c＝0.2 のグラフで接しているように見える箇所があるが、100 項という近似であり、精密にした場合、接することはないはずである。

<c＝0.9>



<c=0.2>



●掛け算を思いついたのは、なんとなくよい予感がありやってみたくなったからであった。グラフにしたら本当に面白い結果になり、驚いた。非自明な零点がｘ軸との接点になるのは、上方の「$g_1(x)=0$ と $g_2(x)=0$ を、解を使って表すと、・・」で示した式を考えれば、当然であったのだが。

●今回のことは、ξ(s)でも同じようになっているはずである。まだやっていないが。L(s)の方が式の収束が速く計算しやすい。

$g_1(x)^2+g_2(x)^2$ を考えたときから（そのときはξ(s)だったが）、掛け算 $g_1(x)\cdot g_2(x)$ を思いつくのに１３年もかかったことになる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.12.19　杉岡幹生