＜ L(s) リーマン予想と同値の予想 B-3 鏡映型のグラフ＞

（その２０６）、（その２１０）の継続で、L(s) リーマン予想の考察を行った。予想 B-3 のグラフがどんなものか？が気になり調べたので報告したい。（下記予想において log1 はゼロだが、そのままおいている。）

予想 B-1（L(s)リーマン予想と同値）

c を 0＜c＜1 の実数とする。次の x に関する二つの方程式を考える。
この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのは c が 1/2 のときのみであろう。

$$\cos(x\cdot\log 1)/1^c - \cos(x\cdot\log 3)/3^c + \cos(x\cdot\log 5)/5^c - \cos(x\cdot\log 7)/7^c + \cdots = 0$$

$$\sin(x\cdot\log 1)/1^c - \sin(x\cdot\log 3)/3^c + \sin(x\cdot\log 5)/5^c - \sin(x\cdot\log 7)/7^c + \cdots = 0$$

予想 B-3（L(s)リーマン予想と同値）

c を 0＜c＜1 の実数とする。次の x に関する二つの方程式を考える。
この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのは c が 1/2 のときのみであろう。

$$\begin{aligned}&(1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log 1+\pi/4) - (1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log 3+\pi/4)\\ &\quad + (1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log 5+\pi/4) - (1/7^c)\cdot\cos(x\cdot\log 7+\pi/4)\\ &\qquad + (1/9^c)\cdot\cos(x\cdot\log 9+\pi/4) - (1/11^c)\cdot\cos(x\cdot\log 11+\pi/4)\\ &\qquad\quad + \cdots\cdots = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(1/1^c)\cdot\cos(x\cdot\log 1-\pi/4) - (1/3^c)\cdot\cos(x\cdot\log 3-\pi/4)\\ &\quad + (1/5^c)\cdot\cos(x\cdot\log 5-\pi/4) - (1/7^c)\cdot\cos(x\cdot\log 7-\pi/4)\\ &\qquad + (1/9^c)\cdot\cos(x\cdot\log 9-\pi/4) - (1/11^c)\cdot\cos(x\cdot\log 11-\pi/4)\\ &\qquad\quad + \cdots\cdots = 0\end{aligned}$$

　この二予想は本質的に同値である。予想 B-3 の方が複雑に見えるかもしれないが、B-3 は左辺の式に関して互いに鏡映の関係になっていて重要である。
　予想 B-3 で c=1/2 とした場合の上の方の式（左辺）を $g_1(x)$、下の方の式（左辺）を $g_2(x)$ とした場合、その曲線のグラフは y 軸に関して対称（鏡映）になっている。

$$\begin{aligned}g_1(x) = &(1/\sqrt{1})\cdot\cos(x\cdot\log 1+\pi/4) - (1/\sqrt{3})\cdot\cos(x\cdot\log 3+\pi/4)\\ &\quad + (1/\sqrt{5})\cdot\cos(x\cdot\log 5+\pi/4) - (1/\sqrt{7})\cdot\cos(x\cdot\log 7+\pi/4)\\ &\qquad + (1/\sqrt{9})\cdot\cos(x\cdot\log 9+\pi/4) - (1/\sqrt{11})\cdot\cos(x\cdot\log 11+\pi/4)\\ &\qquad\quad + \cdots\cdots\end{aligned}$$

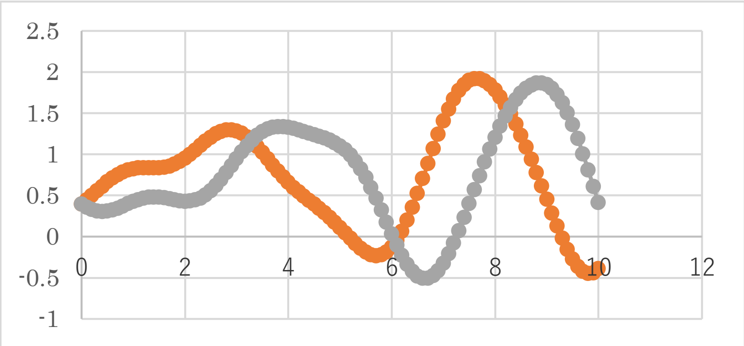
$g_2(x) = (1/\sqrt{1})\cdot\cos(x\cdot\log 1-\pi/4)-(1/\sqrt{3})\cdot\cos(x\cdot\log 3-\pi/4)$
$+(1/\sqrt{5})\cdot\cos(x\cdot\log 5-\pi/4)-(1/\sqrt{7})\cdot\cos(x\cdot\log 7-\pi/4)$
$+(1/\sqrt{9})\cdot\cos(x\cdot\log 9-\pi/4)-(1/\sqrt{11})\cdot\cos(x\cdot\log 11-\pi/4)$
$+ \cdots\cdots$

すなわち、　$g_1(x)=g_2(-x)$　である。

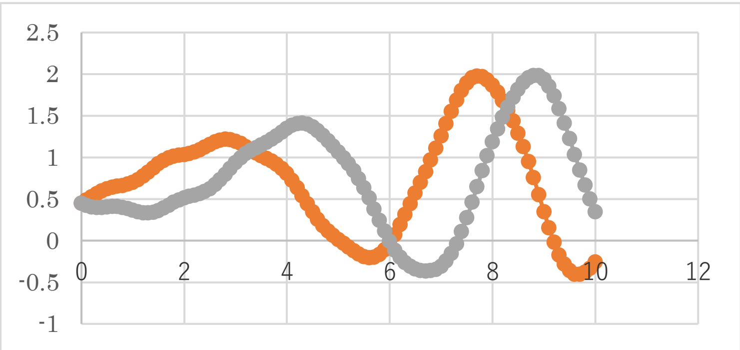
よって、この二つのグラフの形自体は同じである。グラフはどんな形をしているのか？知りたくなったので Excel で計算して描いてみた。$g_1(x)$、$g_2(x)$の最初の１０項、１００項、１０００項で描いた。x は 0.1～10 の範囲という正の範囲のみで描いた（負の範囲はその鏡映）。

オレンジ色⇒$g_1(x)$、　灰色⇒$g_2(x)$

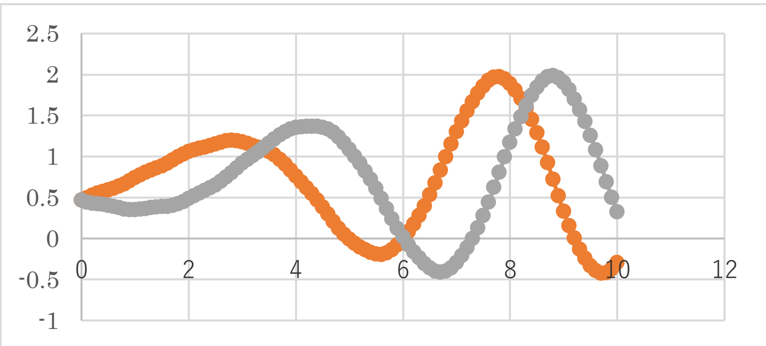
＜１０項まで＞



＜１００項まで＞



＜１０００項まで＞



１０００項のものは、見た目にほとんど最終形に近い形になっていると考えられる。L(s)の非自明な零点（1/2+i・β）の最初の５点のβは、以下となる。

6.02094890469759665490

10.24377030416655455214

12.98809801231242250745

16.34260710458722219498

18.29199319612353483853

・

・

この零点は、下記のサイトからのものである。

****

(c) 2007-2016, Tomás Oliveira e Silva

See disclaimer in page

http://sweet.ua.pt/tos/hobbies.html

****

上記グラフから、両曲線は x=6.020・・で交わっている。次に x=10.243・・で交わることになる。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

- L(s)リーマン予想でグラフの形が気になっていたのだが、これでようやく二つの関数のそのイメージがつかめた。もっと x の範囲を広げて計算をしてみたい。
  ζ(s)でそれに対応するグラフはどうなるか？

- ζ(s)リーマン予想は交代級数がキーであった。ヘール・ボップ彗星　その１
  L(s)は最初から交代級数の形をしているので、ζ(s)のようなややこしいことを考える必要はない。

- $y=g_1(x)$ と $y=g_2(x)$ は y 軸上で交わる。その交点の値は $L(1/2)/\sqrt{2}$ となる。座標では（0, $L(1/2)/\sqrt{2}$）。
  2006 年にタットル彗星　その２で、L(1/2)＝（0.66772681+0.66765610)/2＝0.66769145
  と出していた。よって、$L(1/2)/\sqrt{2}$=0.472129‥

- $g_1(x)=0$ と $g_2(x)=0$ の共通零点が、L(s)非自明な零点のβを与える。
  共通以外のそれぞれ方程式の解を見た場合、グラフからもわかるようにガラクタ解がある。ガラクタ解も無数にあると考えられる。

- $g_1(x)=0$ と $g_2(x)=0$ を、解を用いた形で書くと、それぞれ次のようになっている。

$$\{(1-x^2/\beta_1^2)(1-x^2/\beta_2^2)(1-x^2/\beta_3^2)\cdots\}$$
$$\times[\{(1-x^2/a_1^2)(1-x^2/a_2^2)(1-x^2/a_3^2)\cdots\}-\{x(1-x^2/b_1^2)(1-x^2/b_2^2)(1-x^2/b_3^2)\cdots\}]=0$$

$\{(1-x^2/\beta_1^2)(1-x^2/\beta_2^2)(1-x^2/\beta_3^2)\cdots\}$

$\times[\{(1-x^2/a_1^2)(1-x^2/a_2^2)(1-x^2/a_3^2)\cdots\}+\{x(1-x^2/b_1^2)(1-x^2/b_2^2)(1-x^2/b_3^2)\cdots\}]=0$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$・・がL(s)非自明な零点に対応する。

ややこしいのだが、a_1, a_2, a_3・・は予想B-1での上の方の式の解に対応し、b_1, b_2, b_3・・は予想B-1での下の方の式の解に対応する。

予想B-3でのガラクタ解は、上記方程式のそれぞれの[ ]に対応した方程式[ ]＝0の解になると考えられる。

上式の形からも、$g_1(x)$と$g_2(x)$が鏡映の関係になっていることがわかる。

● たった一つの関数で、L(s)リーマン予想は表現できないだろうか？

それは簡単である。$g_1(x)$と$g_2(x)$をそれぞれ二乗して足した関数$G(x)=g_1(x)^2+g_2(x)^2$を作ればよい。

この関数は無数にx軸と接するが、その接点のx座標がすべてのL(s)非自明な零点$\pm\beta_1, \pm\beta_2$、$\pm\beta_3$・・を与える。だから、予想B-4などとして、

「G(x)＝0が実解をもつのは、c＝1/2のときのみ」

とすればよい。

方程式G(x)＝0は、L(s)非自明な零点（1/2+i・β）の全てのβを解(実解)にもつ。

G(x)＝0ではガラクタ解というややこしいものは登場しない。一番大事なβのみ解に持つ。

● 関数G(x)もy軸に関して対称（鏡映）となっている。

なぜc＝1/2のときのみy＝G(x)はx軸に接し、c＝1/2以外のケースでは接することはないのか？

その理由が解明できればリーマン予想は解けることになる。

● L(s)リーマン予想とξ(s)リーマン予想は、本質的には同じようなものなので、一方が解ければもう一方も解けるという関係になっているはずである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.12.12　杉岡幹生