＜ ふしぎな式、L(1)類-完全対称乗算等式 その５＞

今回もL(1)類-完全対称乗算等式の世界を探索したい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(1)類-完全対称乗算等式

$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16$ ---①

または、上は次とも同じ。

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}$$
$$=(1-1/3+1/5-1/7+\cdots)\times(1-1/3+1/5-1/7+\cdots)$$

少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

まずゼータの分割（分身）の視点から、このL(1)類-完全対称乗算等式のふしぎを味わうことにしよう。これまで①に対してL(1)の４分身、６分身が現れることを示した。

今回は、L(1)類-完全対称乗算等式にL(1)の８分身が現れる様子を見てみよう。

①のxに7/8, 5/8, 3/8, 1/8を代入すると、それぞれ（上から順に）次となる。

$$8^2\{1-1/31+1/33-1/63+\cdots\}\times\{1/15-1/17+1/47-1/49+\cdots\}=\pi^2/16$$
$$8^2\{1/3-1/29+1/35-1/61+\cdots\}\times\{1/13-1/19+1/45-1/51+\cdots\}=\pi^2/16$$
$$8^2\{1/5-1/27+1/37-1/59+\cdots\}\times\{1/11-1/21+1/43-1/53+\cdots\}=\pi^2/16$$
$$8^2\{1/7-1/25+1/39-1/57+\cdots\}\times\{1/9-1/23+1/41-1/55+\cdots\}=\pi^2/16$$

左辺の｛ ｝内に、L(1)を構成する八つの分身がすべて出ている！　全く素晴らしい姿である。

３年前に（その１４）でL(1)８分身を出したが、結果だけ引用すると次となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■L(1)8分割

$C1=1-1/31+1/33-1/63+1/65-1/95+\cdots=(\pi/32)\tan(15\pi/32)$

$C2=1/3-1/29+1/35-1/61+1/67-1/93+\cdots=(\pi/32)\tan(13\pi/32)$

$C3=1/5-1/27+1/37-1/59+1/69-1/91+\cdots=(\pi/32)\tan(11\pi/32)$

$C4=1/7-1/25+1/39-1/57+1/71-1/89+\cdots=(\pi/32)\tan(9\pi/32)$

$C5=1/9-1/23+1/41-1/55+1/73-1/87+\cdots=(\pi/32)\tan(7\pi/32)$

$C6=1/11-1/21+1/43-1/53+1/75-1/85+\cdots=(\pi/32)\tan(5\pi/32)$

$C7=1/13-1/19+1/45-1/51+1/77-1/83+\cdots=(\pi/32)\tan(3\pi/32)$

$C8=1/15-1/17+1/47-1/49+1/79-1/81+\cdots=(\pi/32)\tan(\pi/32)$

$C1 - C2 + C3 - C4 + C5 - C6 + C7 - C8 = \pi/4 = L(1)$ ------②

となっている。

ここで、式の右辺の tan()の値は、以下の通り。

$\tan(15\pi/32) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{(4+2\sqrt{2})} + \sqrt{\{8+4\sqrt{2}+2\sqrt{(20+14\sqrt{2})}\}}$

$\tan(13\pi/32) = -1 + \sqrt{2} + \sqrt{(4-2\sqrt{2})} + \sqrt{\{8-4\sqrt{2}+2\sqrt{(20-14\sqrt{2})}\}}$

$\tan(11\pi/32) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{(4-2\sqrt{2})} + \sqrt{\{8-4\sqrt{2}-2\sqrt{(20-14\sqrt{2})}\}}$

$\tan(9\pi/32) = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{(4+2\sqrt{2})} + \sqrt{\{8+4\sqrt{2}-2\sqrt{(20+14\sqrt{2})}\}}$

$\tan(7\pi/32) = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{(4+2\sqrt{2})} + \sqrt{\{8+4\sqrt{2}-2\sqrt{(20+14\sqrt{2})}\}}$

$\tan(5\pi/32) = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{(4-2\sqrt{2})} + \sqrt{\{8-4\sqrt{2}-2\sqrt{(20-14\sqrt{2})}\}}$

$\tan(3\pi/32) = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{(4-2\sqrt{2})} + \sqrt{\{8-4\sqrt{2}+2\sqrt{(20-14\sqrt{2})}\}}$

$\tan(\pi/32) = -1 - \sqrt{2} - \sqrt{(4+2\sqrt{2})} + \sqrt{\{8+4\sqrt{2}+2\sqrt{(20+14\sqrt{2})}\}}$

==================================

C1～C8 がＬ(1)の分身である（これまで C1,-C2,C3,-C4,C5,-C6,C7,-C8 を分身としてきたが、同じことである)。C1～C8 を足したり、引いたりしただけで②のようにＬ(1)を構成できる。

結果の再掲。

$8^2\{1 -1/31 +1/33 -1/63 +\cdot\cdot\} \times \{1/15 -1/17 +1/47 -1/49 +\cdot\cdot\} = \pi^2/16$

$8^2\{1/3 -1/29 +1/35 -1/61 +\cdot\cdot\} \times \{1/13 -1/19 +1/45 -1/51 +\cdot\cdot\} = \pi^2/16$

$8^2\{1/5 -1/27 +1/37 -1/59 +\cdot\cdot\} \times \{1/11 -1/21 +1/43 -1/53 +\cdot\cdot\} = \pi^2/16$

$8^2\{1/7 -1/25 +1/39 -1/57 +\cdot\cdot\} \times \{1/9 -1/23 +1/41 -1/55 +\cdot\cdot\} = \pi^2/16$

このように分身たちがペアとなって埋めこまれている。なんという素晴らしい光景だろう！

Ｌ(1)は２ｎ分割可能であり、よって、どのような分身たちもこのようにきれいに埋め込まれていく。すなわち、①のＬ(1)類-完全対称乗算等式は、無数に存在する分身たちの運命を背負った式なのである。

それとともに、①は$-1< x <1$ の範囲の任意の実数で成り立つこと自体が、やはりふしぎである。

最後に、前回からの継続のテーマ，Ｌ(1)類-完全対称乗算等式の対称性を調べよう。

==================================

● 考察の出発点とするため前回（その２２４）の③とその対称性の考察を再掲する（一部簡略化した)。

$$\{1/(1-\cos x) -1/(3+\cos x) +1/(5-\cos x) -1/(7+\cos x) +\cdot\cdot\}$$
$$\times \{1/(1+\cos x) -1/(3-\cos x) +1/(5+\cos x) -1/(7-\cos x) +\cdot\cdot\} = \pi^2/16 \quad \text{-----③}$$

ｘはｎπ以外の任意の実数(ｎは整数)。

この式に対し、以下の対称操作を考える。

E：「変数を、同じ変数で置き換える」（x⇒x）
B1：「変数を、その変数を-1 倍したもので置き換える」（x⇒-x）
B2：「変数を、その変数にπを加えたもので置き換える」（x⇒x+π）
B3：「変数を、その変数に-πを加えたもので置き換える」（x⇒x-π）
B4：「変数を、その変数を-1 倍したものにπを加えたもので置き換える」（x⇒-x+π）
B5：「変数を、その変数を-1 倍したものに-πを加えたもので置き換える」（x⇒-x-π）
B6：「変数を、その変数に 2πを加えたもので置き換える」（x⇒x+2π）
B7：「変数を、その変数に-2πを加えたもので置き換える」（x⇒x-2π）
B8：「変数を、その変数を-1 倍したものに 2πを加えたもので置き換える」（x⇒-x+2π）
B9：「変数を、その変数を-1 倍したものに-2πを加えたもので置き換える」（x⇒-x-2π）
（以下、同様に nπを加えたもので続いていく）

・

・

無数にあるこれらのどの操作を行っても③の姿は同じものとなる。
これら全ての操作を要素（元）としてもつ無限集合Ｇ２＝｛ E, B1, B2, B3, B4, B5, B6, ・・・ ｝を考える。
集合Ｇ２は、演算：「一つの操作に引き続いて、次の操作を行う」に関して群（無限群）を成す。Ｇ２は群の公理を満たしている。逆元でいうと、例えば B8 に対する逆元は B9 となり、B9 の逆元は B8 となる。

● ①のＬ(1)類-完全対称乗算等式の x を $\cos(\log x^2)$で置き換えた次の式④を考える。

$$\{1/(1-\cos(\log x^2)) -1/(3+\cos(\log x^2)) +1/(5-\cos(\log x^2)) -1/(7+\cos(\log x^2)) +\cdots\}$$
$$\times\{1/(1+\cos(\log x^2) -1/(3-\cos(\log x^2)) +1/(5+\cos(\log x^2)) -1/(7-\cos(\log x^2)) +\cdots\} = \pi^2/16 \quad \text{-----④}$$

x は 0 以外の任意の実数。

この式では、変数 x をその逆数に置き換える操作（x⇒1/x）を加えて、一つ上の場合より対称操作を増やすことができる。以下に操作を示す。逆数に関係する操作を青色にした。

E：「変数を、同じ変数で置き換える」（x⇒x）
C1：「変数を、その変数を-1 倍したもので置き換える」（x⇒-x）
C2：「変数を、その逆数で置き換える」（x⇒1/x）
C3：「変数を、その逆数を-1 倍したもので置き換える」（x⇒-1/x）
C4：「変数を、その変数を $e^{\pi/2}$倍したもので置き換える」（x⇒ $e^{\pi/2}x$）
C5：「変数を、その変数を $e^{-\pi/2}$倍したもので置き換える」（x⇒ $e^{-\pi/2}x$）
C6：「変数を、その変数を$-e^{\pi/2}$倍したもので置き換える」（x⇒ $-e^{\pi/2}x$）
C7：「変数を、その変数を$-e^{-\pi/2}$倍したもので置き換える」（x⇒ $-e^{-\pi/2}x$）
C8：「変数を、その逆数を $e^{\pi/2}$倍したもので置き換える」（x⇒ $e^{\pi/2}/x$）
C9：「変数を、その逆数を $e^{-\pi/2}$倍したもので置き換える」（x⇒ $e^{-\pi/2}/x$）
C10：「変数を、その逆数を$-e^{\pi/2}$倍したもので置き換える」（x⇒ $-e^{\pi/2}/x$）
C11：「変数を、その逆数を$-e^{-\pi/2}$倍したもので置き換える」（x⇒ $-e^{-\pi/2}/x$）
C12：「変数を、その変数を e^{π}倍したもので置き換える」（x⇒ $e^{\pi}x$）
C13：「変数を、その変数を $e^{-\pi}$倍したもので置き換える」（x⇒ $e^{-\pi}x$）
C14：「変数を、その変数を$-e^{\pi}$倍したもので置き換える」（x⇒ $-e^{\pi}x$）

C15：「変数を、その変数を$-e^{-\pi}$倍したもので置き換える」($x\Rightarrow -e^{-\pi}x$)
C16：「変数を、その逆数をe^{π}倍したもので置き換える」($x\Rightarrow e^{\pi}/x$)
C17：「変数を、その逆数を$e^{-\pi}$倍したもので置き換える」($x\Rightarrow e^{-\pi}/x$)
C18：「変数を、その逆数を$-e^{\pi}$倍したもので置き換える」($x\Rightarrow -e^{\pi}/x$)
C19：「変数を、その逆数を$-e^{-\pi}$倍したもので置き換える」($x\Rightarrow -e^{-\pi}/x$)
(以下、同様に$e^{n\pi/2}$倍の形で続いていく)

・

・

無数にあるこれらのどの操作を行っても④の姿は同じものとなる。
これら全ての操作を要素（元）としてもつ無限集合Ｇ３＝｛E,C1,C2,C3,C4,C5,C6,・・・｝を考える。
集合Ｇ３は、演算：「一つの操作に引き続いて、次の操作を行う」に関して群（無限群）を成す。Ｇ３は群の公理を満たしている。逆元でいうと、例えば、C12 の逆元は C13 となり、C13 の逆元は C12 となる。また C16 の逆元は C16（自分自身）となり、C17 の逆元は C17（自分自身）となる。
Ｇ３は、無限群は無限群でも、Ｇ２に比べて元（要素）の数は倍に増えている。

●L(1)類-完全対称乗算等式

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad \text{---①}$$

少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

数学の式には、美しい式、異様な式、ふしぎな式などいろいろある。美しい式は山のようにあり、過去いろいろと出会ってきた。異様な式にも出会った。ふしぎな式はあまり出会ったことはなかったが、①がそうである。異様な式とふしぎな式は、価値が高い。①はシンプルであるがゆえに、余計に価値が高い。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.12.5　杉岡幹生