＜ ふしぎな式、L(1)類-完全対称乗算等式 その４＞

前回に続き、今回もL(1)類-完全対称乗算等式の対称性を調べたい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(1)類-完全対称乗算等式

$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16$ ---①

または、上は次とも同じ。

$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}$
$=(1-1/3+1/5-1/7+\cdots)\times(1-1/3+1/5-1/7+\cdots)$

少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

（その２２３）の後半で、このふしぎなL(1)類-完全対称乗算等式の対称性を調べた。すこし復習すると、xを$\log x^4$で置き換えた次式は位数８の群の対称性をもち、二面体群に一致すると分かった。

$\{1/(1-\log x^4)-1/(3+\log x^4)+1/(5-\log x^4)-1/(7+\log x^4)+\cdots\}$
$\times\{1/(1+\log x^4)-1/(3-\log x^4)+1/(5+\log x^4)-1/(7-\log x^4)+\cdots\}=\pi^2/16$ ----②

さらに今回、次のようにxをcosxに置き換えると、これは無限群の対称操作を持つ式になることが分かった。

$\{1/(1-\cos x)-1/(3+\cos x)+1/(5-\cos x)-1/(7+\cos x)+\cdots\}$
$\times\{1/(1+\cos x)-1/(3-\cos x)+1/(5+\cos x)-1/(7-\cos x)+\cdots\}=\pi^2/16$ ----③

xは$\pm\pi$ではない任意の実数。

以下の操作を考える。

E：「変数を、同じ変数で置き換える」($x\Rightarrow x$)

A1：「変数を、その変数にπを加えたもので置き換える」($x\Rightarrow x+\pi$)

A2：「変数を、その変数に$-\pi$を加えたもので置き換える」($x\Rightarrow x-\pi$)

A3：「変数を、その変数に2πを加えたもので置き換える」($x\Rightarrow x+2\pi$)

A4：「変数を、その変数に-2πを加えたもので置き換える」($x\Rightarrow x-2\pi$)

A5：「変数を、その変数に3πを加えたもので置き換える」($x\Rightarrow x+3\pi$)

A6：「変数を、その変数に-3πを加えたもので置き換える」($x\Rightarrow x-3\pi$)

・

・

無数にあるこれらのどの操作を行っても③の姿は同じものとなる。

これら全ての操作を元（要素）としてもつ無限集合Ｇ１＝｛E,A1,A2,A3,A4,A5,A6,・・・｝を考える。

集合Ｇ１は、演算：「一つの操作に引き続いて、次の操作を行う」に関して群（無限群）を成す。Ｇ１が群の公理を見たすことはすぐに分かるであろう。逆元を見ると、例えば A5 に対する逆元は A6 となり、逆に A6 の逆元は A5 となる。

最後に、追加の考察や問題をあげておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ③を再掲。

$$\{1/(1-\cos x)-1/(3+\cos x)+1/(5-\cos x)-1/(7+\cos x)+\cdots\}$$
$$\times\{1/(1+\cos x)-1/(3-\cos x)+1/(5+\cos x)-1/(7-\cos x)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad \text{----③}$$

この式は、さらに鏡映（x⇒-x）の操作を加えて、対称操作を増やすことができる。この鏡映（x⇒-x）が加わると、操作の数は倍に増える（青字の所が加わったもの）。

Ｅ：「変数を、同じ変数で置き換える」（x⇒x）
B1：「変数を、その変数を-1 倍したもので置き換える」（x⇒-x）
B2：「変数を、その変数にπを加えたもので置き換える」（x⇒x+π）
B3：「変数を、その変数に-πを加えたもので置き換える」（x⇒x-π）
B4：「変数を、その変数を-1 倍したものにπを加えたもので置き換える」（x⇒-x+π）
B5：「変数を、その変数を-1 倍したものに-πを加えたもので置き換える」（x⇒-x-π）
B6：「変数を、その変数に 2πを加えたもので置き換える」（x⇒x+2π）
B7：「変数を、その変数に-2πを加えたもので置き換える」（x⇒x-2π）
B8：「変数を、その変数を-1 倍したものに 2πを加えたもので置き換える」（x⇒-x+2π）
B9：「変数を、その変数を-1 倍したものに-2πを加えたもので置き換える」（x⇒-x-2π）
・
・

無数にあるこれらのどの操作を行っても③の姿は同じものとなる。
これら全ての操作を要素としてもつ無限集合Ｇ２＝｛ E, B1, B2, B3, B4, B5, B6, ・・・ ｝を考える。

集合Ｇ２は、演算：「一つの操作に引き続いて、次の操作を行う」に関して群（無限群）を成す。Ｇ２が群の公理を見たすことはすぐに分かる。逆元でいうと、例えば B8 に対する逆元は B9 となり、逆に B9 の逆元は B8 となる。

Ｇ２は無限群は無限群でも、Ｇ１に比べて元（要素）の数は２倍に増えている。結局、Ｇ１はＧ２の部分群になっている。

● ［問題１］式③におけるＧ２は、他の無限群の部分群になっているだろうか？
［問題２］Ｇ１ともＧ２とも違う別種の無限群はあるか？
［問題３］ 今回の無限群は、幾何学的にはどんな対称変換に対応しているか？

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.11.28 杉岡幹生

参考文献

・「やさしい群論入門」（成田進、藤永茂著、岩波書店）

・「マスペディア 1000」（リチャード・エルウィス著、宮本寿代訳、ディスカヴァー・トゥエンティワン）