＜ ふしぎな式、L(1)類-完全対称乗算等式 その３＞

今回は、L(1)類-完全対称乗算等式から派生する式や対称性を調べることにする。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(1)類-完全対称乗算等式

$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16$ ---①

または、上は次とも同じ。

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}$$
$$=(1-1/3+1/5-1/7+\cdots)\times(1-1/3+1/5-1/7+\cdots)$$

少なくとも$-1< x <1$で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

何度ながめても、この式はふしぎであり、そしてシンプルである。味わい深いことこの上ないが、ここからいろいろなものが飛び出してくるから、そこにはもの凄いエネルギーと深さが含まれている。

美しい式というのはたくさんあるが、ふしぎな式というのはあまりない。これはそのふしぎな式の一つである。

L(1)類-完全対称乗算等式に関し（その２２１）でL(1)の４分身が含まれている様子を見たが、今回は６分身を見てみよう。（その２２１）で次のように述べた。

「L(1)の２ｎ分割で（無数に）対称的に現れる２分身の間の関係を示している。」---②

それに関し、今回、ｎ＝3 のL(1)６分割で②を確認してみよう。

①の x に 1/6 を代入すると、次となる。

$6^2\{1/5-1/19+1/29-1/43+\cdots\}\times\{1/7-1/17+1/31-1/41+\cdots\}=\pi^2/16$ ---③

①の x に 3/6（つまり 1/2）を代入すると、次となる。

$6^2\{1/3-1/21+1/27-1/45+\cdots\}\times\{1/9-1/15+1/33-1/39+\cdots\}=\pi^2/16$ ---④

①の x に 5/6 を代入すると、次となる。

$6^2\{1-1/23+1/25-1/47+\cdots\}\times\{1/11-1/13+1/35-1/37+\cdots\}=\pi^2/16$ ---⑤

左辺の｛　｝内に、L(1)を構成する六つの分身がすべて見えている。愉しい姿をしている。

⇒（その２１）

このようにL(1)類-完全対称乗算等式は、無数に存在する分身たちの運命を全て背負った式となっている。

そのこととともに、①は$-1<x<1$の範囲の任意の実数で成り立つこと自体が、やはりふしぎある。

さて次に、前回見た次の式を調べよう。

$$\{1/(1^2+x^2)+1/(3^2+x^2)+1/(5^2+x^2)+\cdots\}\times\{1/2+x^2/(2^2+x^2)+x^2/(4^2+x^2)+x^2/(6^2+x^2)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad ---⑥$$

少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

この式の導出の仕方はいくつかあるが、その一つを以下に示す。(前回「・・即座に分かる」としたものを少し丁寧に書き、定義域も書き換えた。)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[⑥の導出]

１１年前の私の結果、次の二つのゼータの香りの漂う公式を利用するのが簡単である。

http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page212.htm(この最後に書いたもの)

1/(1^2+a^2) + 1/(3^2+ a^2) + 1/(5^2+ a^2) + 1/(7^2+ a^2) + ・・ ＝ (π/(4a))・(e^(aπ)-1)/(e^(aπ)+1)

1/(2^2+a^2) + 1/(4^2+ a^2) + 1/(6^2+ a^2) + 1/(8^2+ a^2) + ・・ ＝ -1/(2a^2) + (π/(4a))・(e^(aπ)+1)/(e^(aπ)-1)

これは当時のままの表現だが、この２番目の式の-1/(2a^2)を左辺に移行して、それから二式を辺々掛け算すれば、⑥が得られる。当時上式は、任意の実数で成り立つとしている。したがって、じつは、⑥も任意の実数で成り立つ。よって、⑥をそう書き直しておこう。

$$\{1/(1^2+x^2)+1/(3^2+x^2)+1/(5^2+x^2)+\cdots\}\times\{1/2+x^2/(2^2+x^2)+x^2/(4^2+x^2)+x^2/(6^2+x^2)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad ---⑥$$

任意の実数で成り立つ。

(導出終わり)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

この式は左辺が、ゼータの香りの漂う公式同士の掛け算となっていて面白く、そしてζ(2)の香りが漂っている。①と同様に、任意の実数xで成り立つこと自体がふしぎである。実際、数値実験でどんな実数をxに代入しても⑥は成り立っている。$\pi^2/16$に収束していく。

さらに⑥は別ルートからも導ける。それも以下に示す。

[別ルート]

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad ---①$$

これに対し$t=1/2+x/2$として式変形を行うと、次のL(1)類[奇][偶]乗算等式に移行する。(その２２０)

L(1)類[奇][偶]乗算等式

$$\{1/(1-t)-1/(1+t)+1/(3-t)-1/(3+t)+\cdots\}\times\{1/t-1/(2-t)+1/(2+t)-1/(4-t)+1/(4+t)-\cdots\}=\pi^2/4$$

このｔに対し、ｔ＝ｉｘ（ｉは虚数単位）として計算すると、ｉがうまく消えて⑥に到達する。

$\{1/(1^2+x^2)+1/(3^2+x^2)+1/(5^2+x^2)+\cdots\}\times\{1/2+x^2/(2^2+x^2)+x^2/(4^2+x^2)+x^2/(6^2+x^2)+\cdots\}=\pi^2/16$ ---⑥

（導出終わり）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このように別ルートでも、L(1)類-完全対称乗算等式から直接⑥を導けるのである。
二式を再掲。

$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16$ ---①

少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

$\{1/(1^2+x^2)+1/(3^2+x^2)+1/(5^2+x^2)+\cdots\}\times\{1/2+x^2/(2^2+x^2)+x^2/(4^2+x^2)+x^2/(6^2+x^2)+\cdots\}=\pi^2/16$ ---⑥

任意の実数で成り立つ。

すなわち、この二式は本質的に等しいということになる。（①もじつは奇数以外の任意の実数において成り立つことは確実と推測される。）

これは、Ｌ（χ，ｓ）ゼータに関して、L(s)がＬ（χ，ｓ）の根本なのか、あるいはζ(s)がＬ（χ，ｓ）の根本なのか決められないということを示している。

別の表現をすれば、L(s)とζ(s)は同等の形で、巨大ゼータＬ（χ，ｓ）の根本を形成しているといえる。

最後に、対称性に関して調べた結果を述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● L(1)類-完全対称乗算等式を再掲。

$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16$ ---①

少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

この式で、ｘを-ｘに置き換えても左辺は変わらないこと（不変）を前回見て、群の言葉で表現した。

私は、ｘを1/ｘにしたら不変にならないだろうか？と考えた。上式のままでは無理なのだが、ｘを logx で置き換えた式を構成すると、それが実現できることに気づいた。つまり次式である。

$$\{1/(1-\log x)-1/(3+\log x)+1/(5-\log x)-1/(7+\log x)+\cdots\}$$
$$\times\{1/(1+\log x)-1/(3-\log x)+1/(5+\log x)-1/(7-\log x)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad \text{---⑦}$$

少なくとも $1/e<x<e$ で成り立つ。（e は自然対数の底）

驚くべきことに、⑦の左辺はｘを1/ｘにしても不変となる！
上式は数値計算でももちろん正しい。

● 上の続き。

$$\{1/(1-\log x)-1/(3+\log x)+1/(5-\log x)-1/(7+\log x)+\cdots\}$$
$$\times\{1/(1+\log x)-1/(3-\log x)+1/(5+\log x)-1/(7-\log x)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad \text{---⑦}$$

少なくとも $1/e < x < e$ で成り立つ。

群の視点では、この式も二等辺三角形と同じ対称性をもつ。「変数を同じものに置き換える」、「変数をその逆数に置き換える」という二操作をそれぞれ E, S と置く。この二つの操作のどちらを行っても⑦の姿は同じになる。

さて、E, S を要素としてもつ集合Ｇ＝｛ E, S ｝を考える。

集合Ｇは、演算：「一つの操作に引き続いて、次の操作を行う」に関して位数２の群を成す。

● 上の続き。⑦の x を x^2 で置き換えた式を作る。

$$\{1/(1-\log x^2)-1/(3+\log x^2)+1/(5-\log x^2)-1/(7+\log x^2)+\cdots\}$$
$$\times\{1/(1+\log x^2)-1/(3-\log x^2)+1/(5+\log x^2)-1/(7-\log x^2)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad \text{---⑧}$$

こうするともっと対称性が上がる。

「変数を同じもので置き換える」、「変数を−1 倍したもので置き換える」，「変数をその逆数で置き換える」，「変数を−1 倍したものの逆数で置き換える」という四つの操作をそれぞれ E, S1, S2, S3 と置く。<u>この四操作のどれを行っても式⑧の姿は同じものとなる</u>！

そして、上記の四操作を要素としてもつ集合Ｇ＝｛ E, S1, S2, S3 ｝を考える。

集合Ｇは、演算：「一つの操作に引き続いて、次の操作を行う」に関して、位数４の群（<u>４元群 V</u>）を成す。

４元群 V は、<u>クラインの四元群</u>とも呼ばれる。４元群 V は可換群である。

● さらに続ける。

$$\{1/(1-\log x^2)-1/(3+\log x^2)+1/(5-\log x^2)-1/(7+\log x^2)+\cdots\}$$
$$\times\{1/(1+\log x^2)-1/(3-\log x^2)+1/(5+\log x^2)-1/(7-\log x^2)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad \text{---⑧}$$

この式は、位数４の群（<u>４元群 V</u>）の対称性をもつと分かった。

前回の（<u>その２２２</u>）で見た下式に関し、「変数を同じもので置き換える」、「変数を i 倍したもので置き換える」，「変数を i^2 倍したもので置き換える」，「変数を i^3 倍したもので置き換える」（i：虚数単位）という四操作（少し表現を厳密にした）の集合は位数４の群となり、それは<u>巡回群</u>となった。

$$\{1/(1-x^2)-1/(3+x^2)+1/(5-x^2)-1/(7+x^2)+\cdots\}\times\{1/(1+x^2)-1/(3-x^2)+1/(5+x^2)-1/(7-x^2)+\cdots\}=\pi^2/16$$

---①-2

⑧と①-2 は、位数は４で同じでも、違う対称性を持っている。

⑧ ⇒位数４の群（<u>４元群 V</u>）

①-2⇒位数４の群（<u>巡回群</u>）

● もっと続ける。⑦の x を x^4 で置き換えた式を作る。

$$\{1/(1-\log x^4)-1/(3+\log x^4)+1/(5-\log x^4)-1/(7+\log x^4)+\cdots\}$$
$$\times\{1/(1+\log x^4)-1/(3-\log x^4)+1/(5+\log x^4)-1/(7-\log x^4)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad \text{---⑨}$$

これは、さらに位数が上がる。位数８の群の対称性をもつ。

E：「変数を同じもので置き換える」
R1：「変数を i 倍したもので置き換える」
R2：「変数を i^2 倍したもので置き換える」
R3：「変数を i^3 倍したもので置き換える」
S1：「変数をその逆数で置き換える」
S2：「変数をその逆数の i 倍のものに置き換える」
S3：「変数をその逆数の i^2 倍のものに置き換える」
S4：「変数をその逆数の i^3 倍のものに置き換える」
（ここで、i は虚数単位）

この八つの操作のどれを行っても⑨の姿は同じものとなる！
これら全ての操作を要素としてもつ集合Ｇ＝ ｛ E, R1, R2, R3, S1, S2, S3, S4 ｝ を考える。
集合Ｇは、演算：「一つの操作に引き続いて、次の操作を行う」に関して、位数８の群（二面体群）を成す。

● これで終わりか？
位数の８が上限となると考えられる。まだ分からないが・・

位数が８ともなると積表も大きくなる。調べると、位数８の群は５つのタイプがあると分かった。

自分の出した積表がどのタイプに当たるのか？　困惑した。

様々な群の積表を表示しているサイトを見つけ、自分が出した積表が、位数８の二面体群のものに一致すると分かった。⇒http://escarbille.free.fr/group/

なんでも二面体群は、正多角形の対称性を表現したもののようであり重要な群のようである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.11.21　杉岡幹生

参考文献
・「やさしい群論入門」（成田進、藤永茂著、岩波書店）
・「天才ガロアの発想力」（小島寛之著、技術評論社）
・Wikipedia 二面体群