＜ ふしぎな式、L(1)類-完全対称乗算等式 その２＞

前回（その２２１）で見出したL(1)類-完全対称乗算等式への考察を続けたい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(1)類-完全対称乗算等式

$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16$ ---①

または、上は次とも同じ。

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}$$
$$=(1-1/3+1/5-1/7+\cdots)\times(1-1/3+1/5-1/7+\cdots)$$

これは、少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

やはり、この式はふしぎである。

導出は前回見たように簡単だが、ふしぎさの方に惹かれてしまう。10/31 に見出したのだが、それ以来、眺めてはその神秘性に打たれているという状態である。と、同時に様々な妄想も湧き上がってくる・・

次は前回の最後で紹介したものだが、①両辺を微分して得られる式である。

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)^2+1/(3-x)^2+1/(5+x)^2+1/(7-x)^2+\cdots\}$$
$$=\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}\times\{1/(1-x)^2+1/(3+x)^2+1/(5-x)^2+1/(7+x)^2+\cdots\} \quad \text{---②}$$

少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

これもすばらしい式である。L(1)ファミリーとζ(2)ファミリーの密接な絡まりを示した式と言えよう。

じつは①は、ある変数変換を行うことにより、次のゼータの香りの漂う公式に関係したものに移行できる。

$$\{1/(1^2+x^2)+1/(3^2+x^2)+1/(5^2+x^2)+\cdots\}\times\{1/2+x^2/(2^2+x^2)+x^2/(4^2+x^2)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad \text{---③}$$

少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

これも面白い式である。左辺には、ゼータの香りの漂う公式が二つ出ている。二式ともζ(2)の香りが漂っている。

ゼータの香りの漂う公式に関しては、１１年前に私は多くの種類のものを見出していたのだが、③のものは次の二つに当たる。http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page212.htm(この最後に書いたもの)

1/(1^2+a^2) + 1/(3^2+ a^2) + 1/(5^2+ a^2) + 1/(7^2+ a^2) + ・・ ＝ (π/(4a))･(e^(aπ)−1)/(e^(aπ)+1)
1/(2^2+a^2) + 1/(4^2+ a^2) + 1/(6^2+ a^2) + 1/(8^2+ a^2) + ・・ ＝ −1/(2a^2) + (π/(4a))･(e^(aπ)+1)/(e^(aπ)−1)

　当時の表現そのままでコピーしたが、この二式から③が成り立つことは即座に分かる。

　①を再び見てみよう。

{1/(1−x) −1/(3+x) +1/(5−x) −1/(7+x) +･･} × {1/(1+x) −1/(3−x) +1/(5+x) −1/(7−x) +･･}＝π^2/16　---①

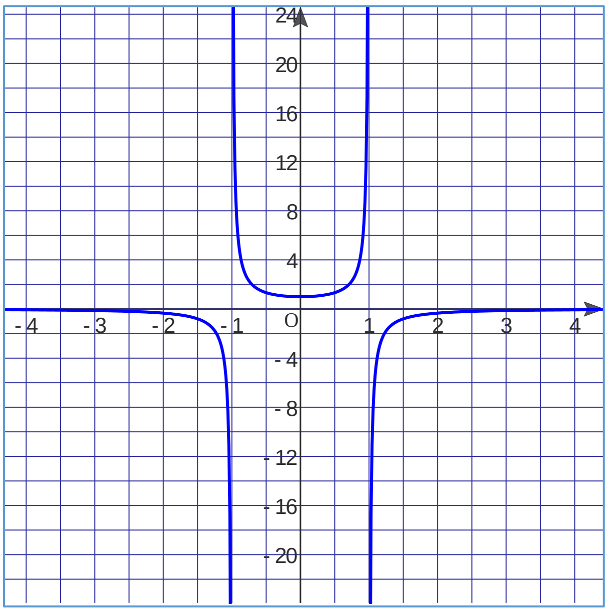
　私は、この左辺がどうも気になった。
「左辺の二式を掛け合わせると①になる」というのは、いったいどういうことなのだろうか・・？

どちらの式も無限の項数があるから、１項同士、２項同士、３項同士・・と徐々に項数を増やして、それがどんなグラフになるか気になったので少し調べた。

　すなわち、次の関数がどんなグラフ（曲線）になるかを見たわけである。

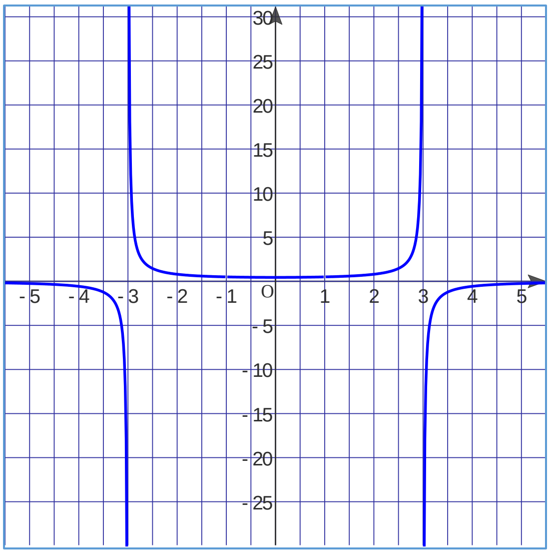
f1(x)＝{1/(1−x)} × {1/(1+x)}
f2(x)＝{1/(1−x) −1/(3+x)} × {1/(1+x) −1/(3−x)}
f3(x)＝{1/(1−x) −1/(3+x) +1/(5−x)} × {1/(1+x) −1/(3−x) +1/(5+x)}
f4(x)＝{1/(1−x) −1/(3+x) +1/(5−x) −1/(7+x)} × {1/(1+x) −1/(3−x) +1/(5+x) −1/(7−x)}
・
・
　GRAPES というフリーのグラフ描画ソフトを使って調べた結果は以下の通り。

■y=f1(x)のグラフ
　y＝{1/(1−x)} × {1/(1+x)}



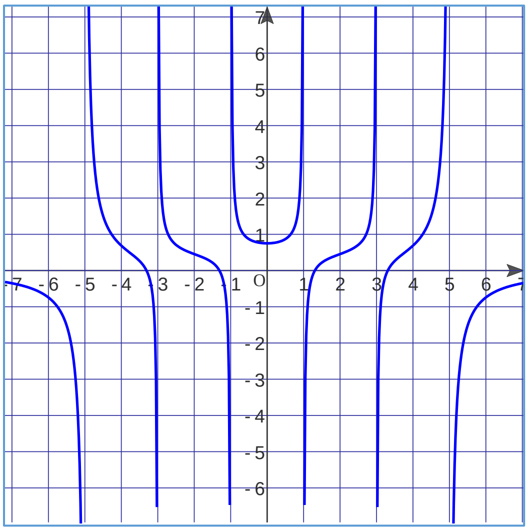
■y=f2(x)のグラフ

y＝{1/(1−x) −1/(3+x)} × {1/(1+x) −1/(3−x)}



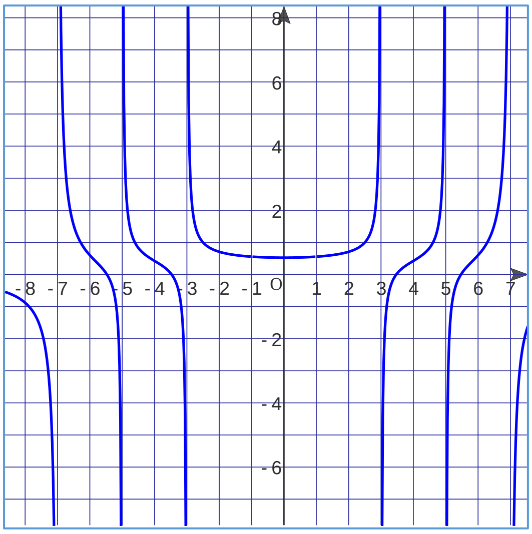
■y=f3(x)のグラフ

y＝{1/(1−x) −1/(3+x) +1/(5−x)} × {1/(1+x) −1/(3−x) +1/(5+x)}



■y=f4(x)のグラフ

y＝{1/(1−x) −1/(3+x) +1/(5−x) −1/(7+x)} × {1/(1+x) −1/(3−x) +1/(5+x) −1/(7−x)}



　これらの結果を見て、面白い現象が出ていることに読者は気づかれるであろうか。

　・奇数個の項同士の掛け算となっている f1(x)や f3(x)のグラフでは、x＝±1 が特異点になっている。
　・偶数個の項同士の掛け算となっている f2(x)や f4(x)のグラフでは、x＝±1 が特異点になっていない。

　こんなことになっているのである！
　手計算していくと、たしかに最後は x＝±1 の特異点が現れない式に行きつくことがわかる。GRAPES というソフトは、そこまできちんと計算した上で描画をしてくれているのである。
　なお、略したが、f5(x)のグラフでも上で述べたことは成り立っている。

　それにしてもこの現象は面白い。そして、これらの式を無限個の項に移行した結果が、①右辺の $\pi^2/16$ になる！というのはふしぎであり、どうしてそんなことになるのか？、私にはまったくわからない。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● L(1)類-完全対称乗算等式を再掲。

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad ---①$$

　この式は対称性が際立っている。
幾何学の観点では二等辺三角形がもつ対称性と同じである。群の言葉でいえば、位数２の群の対称性をもつ。
「変数をそのまま保つ」、「変数を-1 倍する」という二つの操作をそれぞれ E,M と置く。この二つの操作のどちらを行っても式①の姿は同じものとなる。
　さて、E, M という操作を要素としてもつ集合Ｇ＝ {E, M} を考える。
集合Ｇは、演算：「一つの操作に引き続いて、次の操作を行う」に関して、位数２の群を成す。

● L(1)類-完全対称乗算等式の x を x^2 で置き換えた式を作る。

$$\{1/(1-x^2)-1/(3+x^2)+1/(5-x^2)-1/(7+x^2)+\cdots\}\times\{1/(1+x^2)-1/(3-x^2)+1/(5+x^2)-1/(7-x^2)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad ---①\text{-}2$$

こうするともっと対称性が上がる。位数４の群の対称性をもつ。
「変数をそのまま保つ」、「変数を i 倍する」，「変数を i^2 倍する」，「変数を i^3 倍する」という四つ操作をそれぞれ次のように E, R1, R2, R3 と置く。この四操作のうち、どれを行っても式①の姿は同じものとなる！
そして、E, R1, R2, R3 という操作を要素としてもつ集合Ｇ＝ {E, R1, R2, R3} を考える。

集合Ｇは、演算：「一つの操作に引き続いて、次の操作を行う」に関して、位数４の群（巡回群）を成す。

● ③の考察では１１年前に出した結果が役立ってくれた。１１年後にこんな形で役にたつとは思いもしなかった。将棋では、序盤に何げなくついた端歩（はしふ）が終盤の詰みの局面で（偶然に）役にたった！ということがよく起こるが、上のこととなんとなく似ている。人生全般においても同じようなことがあるのかもしれない。

● ①と③から、次式が成り立つ。

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}$$
$$=\{1/(1^2+x^2)+1/(3^2+x^2)+1/(5^2+x^2)+\cdots\}\times\{1/2+x^2/(2^2+x^2)+x^2/(4^2+x^2)+\cdots\}$$

少なくとも $-1<x<1$ で成り立つ。

左辺はＬ(1)ファミリー（Ｌ(1)とその分身たち）の世界であり、右辺はζ(2)の香りが漂っている。

● ③を再掲。

$$\{1/(1^2+x^2)+1/(3^2+x^2)+1/(5^2+x^2)+\cdots\}\times\{1/2+x^2/(2^2+x^2)+x^2/(4^2+x^2)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad ---③$$

これは、次のようにも表現できる。

$$\{1/(1^2+x^2)+1/(3^2+x^2)+1/(5^2+x^2)+\cdots\}\times\{1/2+x^2/(2^2+x^2)+x^2/(4^2+x^2)+\cdots\}=(1/2)\{1+1/3^2+1/5^2+\cdots\}$$

これもふしぎを醸し出している。なお、$1+1/3^2+1/5^2+\cdots=(3/4)\zeta(2)$である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.11.14　杉岡幹生

参考文献

・「ガロアと群論」（リリアン・リーバー著、浜稲雄訳、みすず書房）
・「やさしい群論入門」（成田進、藤永茂著、岩波書店）
・「天才ガロアの発想力」（小島寛之著、技術評論社）