＜ ふしぎな式、L(1)類−完全対称乗算等式 ＞

ふしぎな式に到達したので紹介したい。次のものである。その対称的な形から、L(1)類−完全対称乗算等式と名付けたい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(1)類−完全対称乗算等式

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad ---①$$

これは、少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

まったくふしぎな式である。これが出たとき、こんな式がこの世にあったのか！と思った。いつまで眺めていても飽きない。

美しい対称性に驚くが、左辺の二式を掛けるとなぜか$\pi^2/16$になるという面白さにも魅了される。①は次のようにも書ける。この形も神秘的であり、ゼータの深い所を示しているように見える。

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}$$
$$=(1-1/3+1/5-1/7+\cdots)\times(1-1/3+1/5-1/7+\cdots)$$

L(1)類−完全対称乗算等式は、この３年半「ゼータの香り・・」シリーズでやってきたものを本質的に含んでいる。L(1)の２ｎ分割で（無数に）対称的に現れる２分身の間の関係を示している（最後、参照）。

それよりもなによりも、$-1<x<1$における任意の実数で成り立つという事実に驚いてしまう。

式のふしぎさとは裏腹に、その導出は全く簡単である。

少し前にL(1)類[奇][偶]乗算等式が得られたわけだが（(その２２０）参照)、それに対しさらに変数変換を行って①に達するというやや遠回りの方法で得られた。

今回は直接的に①を導いておくことにする。①の導出過程を示す。

****

＜L(1)類−完全対称乗算等式の導出＞

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16 \quad ---①$$

これは、少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

この①の導出方法を示す。

（その２０８）で得た、三角関数の部分分数展開式の変形版の次式を考える。

$$1/(1-x)-1/(1+x)+1/(3-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(5+x)+\cdots=(\pi/2)\tan(\pi x/2) \quad ----②$$

これは、少なくとも$0<x<1$で成り立つ。

②に対して、x＝1/2+t/2 と変数変換を行うと、次のようになる。

$$1/(1-t)-1/(3+t)+1/(5-t)-1/(7+t)+\cdots=(\pi/4)\tan(\pi/4+\pi t/4) \quad ----③$$

これは、少なくとも-1< t <1 で成り立つ。

次に②に対して、x＝1/2-s/2 と変数変換を行うと、次のようになる。

$$1/(1+s)-1/(3-s)+1/(5+s)-1/(7-s)+\cdots=(\pi/4)\cot(\pi/4+\pi s/4) \quad ----④$$

これは、少なくとも-1< s <1 で成り立つ。

ここで③、④の t と s を x で置き換えると、それぞれ次の③-2、④-2 となる。

$$1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots=(\pi/4)\tan(\pi/4+\pi x/4) \quad ----③-2$$

これは、少なくとも-1< x <1 で成り立つ。

$$1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots=(\pi/4)\cot(\pi/4+\pi x/4) \quad ----④-2$$

これは、少なくとも-1< x <1 で成り立つ。

これら二式の辺々を掛け算すると、①が得られる。
[導出終わり]
****

このように全く簡単に得られるのである。式を再掲しよう。

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16$$

または、上は次とも同じ。

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}$$
$$=(1-1/3+1/5-1/7+\cdots)\times(1-1/3+1/5-1/7+\cdots)$$

この式は、あまりにもふしぎであり、何度見ても味わいがある。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝
● x を-x にしても式は全く変わらない。鏡映の対称性がある。

●上方で、
「L(1)の２ｎ分割で（無数に）対称的に現れる２分身の間の関係を示している。」---⑤
と述べた。この意味は、以下のことである。例えば、L(1) ４分割の場合を見てみよう。

①の x に 1/4 を代入すると、次となる。

$4^2\{1/3 -1/13 +1/19 -1/29 +\cdots\} \times \{1/5 -1/11 +1/21 -1/27 +\cdots\} = \pi^2/16$

①の x に 3/4 を代入すると、次となる。

$4^2\{1/1 -1/15 +1/17 -1/31 +\cdots\} \times \{1/7 -1/9 +1/23 -1/25 +\cdots\} = \pi^2/16$

こうなっている。L(1)の四つの分身がすべて見えている。（その１４）を見てもらえば、⑤の文の意味がわかると思う。

● 絶対確実なところで「これは、少なくとも-1< x <1 で成り立つ。」としているが、Excel VBA でいろいろな数値実験をやっているが、じつは奇数以外の任意の実数で式は成り立っている。導出過程での三角関数の性質から、当然といえば当然なのかもしれないが、それでもふしぎである。①左辺の収束は意外に速い。

● L(1)類-完全対称乗算等式の両辺を微分することで、次が得られた。

$$\{1/(1-x) -1/(3+x) +1/(5-x) -1/(7+x) +\cdots\} \times \{1/(1+x)^2 +1/(3-x)^2 +1/(5+x)^2 +1/(7-x)^2 +\cdots\}$$
$$= \{1/(1+x) -1/(3-x) +1/(5+x) -1/(7-x) +\cdots\} \times \{1/(1-x)^2 +1/(3+x)^2 +1/(5-x)^2 +1/(7+x)^2 +\cdots\}$$

これは、少なくとも-1< x <1 で成り立つ。

これも素晴らしい式である。

L(1)類とζ(2)類の分身間に成立する見事な対称性を現している。

x に 1/2 を代入したり、1/4 を代入したりして、分身たちが織りなす妙を味わっていただきたい。
（その１３）、（その１４）参照。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.11.06　杉岡幹生