＜ [奇][偶]乗算等式 ＞

L(1)類ζ(2)類乗算等式辺りの考察から、ふしぎな式を見つけたので今回はそれを紹介したい。次の二つである。それぞれL(1)類[奇][偶]乗算等式、ζ(2)類[奇][偶]乗算等式と名づけた。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(1)類[奇][偶]乗算等式

$$\{1/(1-x)-1/(1+x)+1/(3-x)-1/(3+x)+\cdots\}\times\{1/x-1/(2-x)+1/(2+x)-1/(4-x)+1/(4+x)-\cdots\}=\pi^2/4$$

ζ(2)類[奇][偶]乗算等式

$$\{1/(1-x)^2+1/(1+x)^2+1/(3-x)^2+1/(3+x)^2+\cdots\}\times\{1/x^2+1/(2-x)^2+1/(2+x)^2+1/(4-x)^2+1/(4+x)^2+\cdots\}$$
$$=(\pi^2/4)\{1/x^2+1/(1-x)^2+1/(1+x)^2+1/(2-x)^2+1/(2+x)^2+1/(3-x)^2+1/(3+x)^2+1/(4-x)^2+1/(4+x)^2+\cdots\}$$

これらは、少なくとも $0<x<1$ で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

この二つだが、美しく、そしてふしぎな式である。これはゼータの泉の湧き出し口に位置する式のようにも感じる。

今回は式を眺めて感じるところを羅列することにし、導出方法は次回以降に回す。
（導出までの流れは次の通り。まずζ(2)類[奇][偶]乗算等式が得られた。その類似をL(1)類で考えた結果、L(1)類[奇][偶]乗算等式に到達した。）

[奇][偶]の意味はすぐに分かってもらえると思う。式に見える奇数と偶数からそのように付けた。

では、これら二式を眺めて感じるところを以下思いつくまま述べる。

****

●ζ(2)類[奇][偶]乗算等式は、掛け算が足し算になったともとれる。

$A=1/(1-x)^2+1/(1+x)^2+1/(3-x)^2+1/(3+x)^2+\cdots$

$B=1/x^2+1/(2-x)^2+1/(2+x)^2+1/(4-x)^2+1/(4+x)^2+\cdots$

とおくと、次のようになっている。

$A\times B=(\pi^2/4)(A+B)$

つまり、奇数界×偶数界＝整数界のようになっている。$(\pi^2/4)$というトンネルを抜けると・・

●L(1)類[奇][偶]乗算等式の x に 1/2 を代入すると、左辺に $L(1)=\pi/4$ が二つ現れる。

また、x に 3/4 または 1/4 を代入すると、L(1)の左辺には次の２分身が現れる。

$1 - 1/7 + 1/9 - 1/15 + \cdots = (\pi/8)(1+\sqrt{2})$

$1/3 - 1/5 + 1/11 - 1/13 + \cdots = (\pi/8)(-1+\sqrt{2})$

x に 7/8 または 1/8 を代入すると、L(1) ４分身のうちの二つが現れる。

x に 5/8 または 3/8 を代入すると、L(1) ４分身のうちの二つが現れる。

・・

と、このようにｘに様々な値を代入することで、L(1)やその分身たちが立ち現れてくる。(分身の出現の様子は、本「ゼータの香り・・」シリーズで見てきた通り)

上は、ζ(2)類[奇][偶]乗算等式でも同様である。

分身の出現の様子から、式に秘められたものすごい対称性を感じる。

● 上記のようにｘ＝1/2 を基準にして、対称的に分身たちが現れてくる。その 1/2 はリーマン予想の 1/2 に関係あるのかもしれない。

●ζ(2)類[奇][偶]乗算等式を発見したとき、そのふしぎさと美しさに感動した。

その後にL(1)類[奇][偶]乗算等式を見つけたわけだが、ζ(2)類式以上にふしぎなものを感じた。右辺が定数となっていることに驚愕した。L(1)類[奇][偶]乗算等式は、夢のような式・・

● 両式から($\pi^2/4$)を消すと、L(1)類とζ(2)類がからまり合った式が得られる。やはりL(1)とζ(2)は底辺でからまっている。よってL(s)とζ(s)、どちらが一次のゼータＬ(χ, ｓ)の根本とは決められない。

● L(1)類[奇][偶]乗算等式の両辺を微分すると、また別種の優雅な式が得られる。略すが、微分されたし。

****

2021.10.31　杉岡幹生

参考文献

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)