＜ L(1)類ζ(2)類乗算等式から派生する多項式 ＞

“L(1)類ζ(2)類乗算等式”（下記①）の考察を続けたい。この右辺を展開していけば興味ある式が出るのではないか？との予想のもと、何項か展開して得られた多項式を今回は示したい。まだ始めたばかりであり、得られた式は少数であって、それがゼータの何を反映しているのかまだわからない点が多い。

$$1/(1-x)^3-1/(1+x)^3+1/(3-x)^3-1/(3+x)^3+1/(5-x)^3-1/(5+x)^3+\cdots$$
$$=\{1/(1-x)-1/(1+x)+1/(3-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(5+x)+\cdots\}\times\{1/(1-x)^2+1/(1+x)^2+1/(3-x)^2+1/(3+x)^2+1/(5-x)^2+1/(5+x)^2+\cdots\}$$
―――①

これは、少なくとも $0<x<1$ で成り立つ。

述べてきた通り、このL(1)類ζ(2)類乗算等式はゼータの根本に近いところに位置する式であり、味わい深いものである。

右辺を展開するといっても、無限の数の項があり、いきなりは無理である。少しずつ有限個の項数で展開していく。展開の仕方も左辺との関連があり悩ましいが、左辺と右辺では次のようにするのがよいと気づいた。
（初項からｎ項まで）＝｛初項からｎ項まで｝×｛初項からｎ項まで｝

例えば、n＝3 とした場合、次のようにする。

$$1/(1-x)^3-1/(1+x)^3+1/(3-x)^3=\{1/(1-x)-1/(1+x)+1/(3-x)\}\times\{1/(1-x)^2+1/(1+x)^2+1/(3-x)^2\}$$

この右辺を展開したものから左辺を引く。

以下、結果を示す。得られた式を $f_n(x)$ とする。n は上で述べた n を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(1)類ζ(2)類乗算等式①の有限項数の展開

$$1/(1-x)^3-1/(1+x)^3+1/(3-x)^3-1/(3+x)^3+1/(5-x)^3-1/(5+x)^3+\cdots$$
$$=\{1/(1-x)-1/(1+x)+1/(3-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(5+x)+\cdots\}\times\{1/(1-x)^2+1/(1+x)^2+1/(3-x)^2+1/(3+x)^2+1/(5-x)^2+1/(5+x)^2+\cdots\}$$
―――①

①に関し、（初項からｎ項まで）＝｛初項からｎ項まで｝×｛初項からｎ項まで｝
とした式に対し、右辺を展開して、右辺から左辺を引いて整理して最終的に得られた式 $f_n(x)$ は以下の通り。

[n＝2 のとき]

$1/(1-x)^3-1/(1+x)^3=\{1/(1-x)-1/(1+x)\}\times\{1/(1-x)^2+1/(1+x)^2\}$ に対し、次の $f_2(x)$ が得られた。

$$f_2(x)=-2x/\{(1-x)^2(1+x)^2\}$$

[n＝3 のとき]

$1/(1-x)^3-1/(1+x)^3+1/(3-x)^3=\{1/(1-x)-1/(1+x)+1/(3-x)\}\times\{1/(1-x)^2+1/(1+x)^2+1/(3-x)^2\}$ に対し、次の $f_3(x)$ が得られた。

$f_3(x) = -6(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)/\{(1-x)^2(1+x)^2(3-x)^2\}$

[n=4 のとき]

$1/(1-x)^3 - 1/(1+x)^3 + 1/(3-x)^3 - 1/(3+x)^3 = \{1/(1-x) - 1/(1+x) + 1/(3-x) - 1/(3+x)\} \times \{1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2\}$

に対し、次の $f_4(x)$ が得られた。

$f_4(x) = -4x(3x^4 - 10x^2 + 23)/\{(1-x)^2(1+x)^2(3-x)^2(3+x)^2\}$

[n=5 のとき]

$1/(1-x)^3 - 1/(1+x)^3 + 1/(3-x)^3 - 1/(3+x)^3 + 1/(5-x)^3$

$= \{1/(1-x) - 1/(1+x) + 1/(3-x) - 1/(3+x) + 1/(5-x)\} \times \{1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2 + 1/(5-x)^2\}$

に対し、次の $f_5(x)$ が得られた。

$f_5(x) = -20(x^7 - 7x^6 + 9x^5 + 25x^4 - 29x^3 - 69x^2 + 115x - 45)/\{(1-x)^2(1+x)^2(3-x)^2(3+x)^2(5-x)^2\}$

[n=6 のとき]

$1/(1-x)^3 - 1/(1+x)^3 + 1/(3-x)^3 - 1/(3+x)^3 + 1/(5-x)^3 - 1/(5+x)^3$

$= \{1/(1-x) - 1/(1+x) + 1/(3-x) - 1/(3+x) + 1/(5-x) - 1/(5+x)\} \times \{1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2 + 1/(5-x)^2 + 1/(5+x)^2\}$

に対し、次の $f_6(x)$ が得られた。

$f_6(x) = -2x(15x^8 - 420x^6 + 4242x^4 - 11380x^2 + 19831)/\{(1-x)^2(1+x)^2(3-x)^2(3+x)^2(5-x)^2(5+x)^2\}$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このような意味ありげな式が得られた。計算が大変であるが、結果が正しいことは数値計算で確かめた。

$f_n(x)$ の分子の多項式がやはり気になる。
n が奇数の場合、その分子の多項式の係数を足し算するとゼロになる！

例えば、

$f_5(x) = -20(x^7 - 7x^6 + 9x^5 + 25x^4 - 29x^3 - 69x^2 + 115x - 45)/\{(1-x)^2(1+x)^2(3-x)^2(3+x)^2(5-x)^2\}$

の“$x^7 - 7x^6 + 9x^5 + 25x^4 - 29x^3 - 69x^2 + 115x - 45$“の係数を足していくと、

$1-7+9+25-29-69+115-45=0$

とゼロになる。

n=3 も同様（すぐわかる）。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 数値計算によって、n が大きくなっていくと $f_n(x)$ はだんだんとゼロに向かって収束していく。

それは、$f_n(x)$ の式の意味から当然といえば当然である。x に 1/2 を代入した、$f_n(1/2)$ で Excel で数値計算を行ったが、それでわかる。観察すると、n は偶数と奇数でわけて考えた方が分かりやすい。

● n＝3 の

$f_3(x)=-6(x^3-3x^2+3x-1)/\{(1-x)^2(1+x)^2(3-x)^2\}$

などを見ると、$(x^3-3x^2+3x-1)=(x-1)^3$ であり、それから推測して、$f_n(x)$ は、例えば、$(x-1)^n$ に類したものに関係があるのかもしれない。

仮に $f_n(x)$ が、もし $(x-1)^n$ であれば、$0<x<1$ で n＝∞でゼロに収束するのでわかりやすい。しかし、n＝3 以外を見ると、$f_n(x)$ はそんなに単純なものではなさそうである。

● $f_5(x)=-20(x^7-7x^6+9x^5+25x^4-29x^3-69x^2+115x-45)/\{(1-x)^2(1+x)^2(3-x)^2(3+x)^2(5-x)^2\}$

の分子の

$x^7-7x^6+9x^5+25x^4-29x^3-69x^2+115x-45$

は、次のように因数分解できることに気づいた。

$x^7-7x^6+9x^5+25x^4-29x^3-69x^2+115x-45=(x-1)^3(x^4-4x^3-6x^2+20x+45)$

そして右辺の“$x^4-4x^3-6x^2+20x+45$”を $y=x^4-4x^3-6x^2+20x+45$ として関数と見ると、このグラフは x 軸で交わらない。すなわち、$x^4-4x^3-6x^2+20x+45=0$ は実数解をもたない。つまり、これ以上（実数範囲で）因数分解できない。

ついでに、n=4 の

$f_4(x)=-4x(3x^4-10x^2+23)/\{(1-x)^2(1+x)^2(3-x)^2(3+x)^2\}$

の“$3x^4-10x^2+23$“に注目して、$3x^4-10x^2+23=0$ を考えると、これも実数解をもたない。

また、$f_6(x)=-2x(15x^8-420x^6+4242x^4-11380x^2+19831)/\{(1-x)^2(1+x)^2(3-x)^2(3+x)^2(5-x)^2(5+x)^2\}$

の $15x^8-420x^6+4242x^4-11380x^2+19831$ に対する $15x^8-420x^6+4242x^4-11380x^2+19831=0$ もやはり実数解をもたない！

● おそらく n が奇数の場合は、$(x-1)^3\times$○として○の多項式を考えるということになりそうである。

n=3 の場合は、$(x^3-3x^2+3x-1)=(x-1)^3\cdot 1$ と解釈して、○は 1 となる。

＝＝

2021.10.24　杉岡幹生