

＜ [Q(√-2) ゼータ (1) 類=ζ (2) 類] 等式 ＞

先に L(1) 類 ζ (2) 類乗算等式を導いた。今回その仲間といえる別種の興味深い式が得られたので紹介したい。

$$\{2/(1^2-x^2) -6/(3^2-x^2)+10/(5^2-x^2) -14/(7^2-x^2) +\cdots\}^2 \\ =1/(1-x)^2 +1/(1+x)^2 +1/(3-x)^2 +1/(3+x)^2 +1/(5-x)^2 +1/(5+x)^2 +\cdots \quad \text{----①}$$

このような面白い式が得られた。これは、少なくとも $0 < x < 1$ で成り立つ。

左辺の { } 内は、虚 2 次体 $Q(\sqrt{-2})$ ゼータやその分身を生み出す式である。右辺は、リーマン・ゼータ $\zeta(s)$ やその分身を生み出す式である。

ここで、虚 2 次体 $Q(\sqrt{-2})$ ゼータ $L_2(s)$ とは次のものである。なお、“ $L_2(s)$ ” は、私が独自に用いている記号で一般的なものではない。

$$L_2(s) = 1 + 1/3^s - 1/5^s - 1/7^s + 1/9^s + 1/11^s - 1/13^s - 1/15^s + \cdots$$

$\zeta(s)$ は実 2 次体 $Q(\sqrt{1})$ のゼータと考えられるが、 $\sqrt{1}$ は 1 なので、結局、 $Q(\sqrt{1})$ は有理数体に戻るため、 $\zeta(s)$ は有理数体のゼータとなる。しかし私のこれまでの研究から、 $\zeta(s)$ は実 2 次体における親分のゼータであると確実に言える。

①を [Q(√-2) ゼータ (1) 類=ζ (2) 類] 等式 と名付けたい。この式は虚の世界と実の世界をつなぐ式となっている。“Q(√-2) ゼータ (1) 類” は “ $L_2(1)$ 類” と同じ意味である。

①の左辺の x に $1/2$ を代入すると、 $L_2(1)$ が出る。 $L_2(1) = 1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 - 1/13 - 1/15 + \cdots$

①の右辺の x に $1/2$ を代入すると、ζ (2) が出る。

復習の意味で、L(1) 類 ζ (2) 類乗算等式を再度見ておこう。

$$1/(1-x)^3 - 1/(1+x)^3 + 1/(3-x)^3 - 1/(3+x)^3 + 1/(5-x)^3 - 1/(5+x)^3 + \cdots \\ = \{1/(1-x) - 1/(1+x) + 1/(3-x) - 1/(3+x) + 1/(5-x) - 1/(5+x) + \cdots\} \times \{1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2 + 1/(5-x)^2 + 1/(5+x)^2 + \cdots\} \\ \text{-----②}$$

これも虚の世界と実の世界をつなぐ式となっている。

左辺と右辺 1 番目の { } 内の式が $L(s)$ やその分身を生み出す式、つまり虚 2 次体 $Q(\sqrt{-1})$ ゼータに関係する。一方、右辺 2 番目の { } 内の式は $\zeta(s)$ に関係するので、実 2 次体に関係する。

さて、①をどうやって思いついたかである。

②を導いた際、複数の部分分数展開式における三角関数に着目し、三角関数同士をうまく相殺するように組み合わせることで②が導けた。その視点を獲得できたので、その方向から考察して今回①に到達した。

①を導いておこう。

=====

<[Q(√-2) ゼータ (1) 類=ζ (2) 類] 等式の導出>

「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」に次の部分分数展開式が出ている。sec(x)=1/cos(x)である。

$$\sec(x) = 4\pi \{1/(\pi^2 - 4x^2) - 3/(9\pi^2 - 4x^2) + 5/(25\pi^2 - 4x^2) - 7/(49\pi^2 - 4x^2) + \dots\}$$

これを変数変換して、次を得る。

$$\{1/(1-x)^2 - 3/(3-x)^2 + 5/(5-x)^2 - 7/(7-x)^2 + \dots\}^2 = (\pi/2)^2 / \cos^2(\pi x/2) \quad \text{---③}$$

([その208](#)) で導いた次式を掲げる。

$$1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2 + 1/(5-x)^2 + 1/(5+x)^2 + \dots = (\pi/2)^2 / \cos^2(\pi x/2) \quad \text{---④}$$

③と④から、即座に①が得られる。

(導出終わり)

=====

このようにして①が得られた。再びそれを見よう。

$$\begin{aligned} \{2/(1^2-x^2) - 6/(3^2-x^2) + 10/(5^2-x^2) - 14/(7^2-x^2) + \dots\}^2 \\ = 1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2 + 1/(5-x)^2 + 1/(5+x)^2 + \dots \quad \text{---①} \end{aligned}$$

これは、次のようにも変形できる。

$$\begin{aligned} \{1/(1-x) + 1/(1+x) - 1/(3-x) - 1/(3+x) + 1/(5-x) + 1/(5+x) - 1/(7-x) - 1/(7+x) + \dots\}^2 \\ = 1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2 + 1/(5-x)^2 + 1/(5+x)^2 + \dots \quad \text{---①-2} \end{aligned}$$

こちら興味深い。これらは眺めていて飽きない。

この①-2 は、より直接的に $L_2(s) = 1 + 1/3^s - 1/5^s - 1/7^s + \dots$ を表現したものになっているともいえる。xに 1/2 を代入するとすぐわかる。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

● $L_2(1) = 1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 - 1/13 - 1/15 + \dots$

この値は、いくらになるだろうか？

答えは、 $L_2(1) = \pi/(2\sqrt{2})$ である。虚 2 次体の類数公式から出るし、テイラーシステムを使っても出る。

①の x に $1/2$ を代入すると、以下となる。

$$\text{左辺} = 4(1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 - 1/13 - 1/15 + \dots)^2 = 4(L_2(1))^2 = \pi^2/2$$

$$\text{右辺} = 4(1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots) = 4(3\zeta(2)/4) = \pi^2/2$$

● ①-2 を再び見よう。

$$\begin{aligned} & \{1/(1-x) + 1/(1+x) - 1/(3-x) - 1/(3+x) + 1/(5-x) + 1/(5+x) - 1/(7-x) - 1/(7+x) + \dots\}^2 \\ &= 1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2 + 1/(5-x)^2 + 1/(5+x)^2 + \dots \quad \text{--- ①-2} \end{aligned}$$

この式の微分を重ねていくと、右辺から出てくる $L(3)$ 、 $\zeta(4)$ 、 $L(5)$ 、 $\zeta(6)$ ・・・は、 $Q(\sqrt{-2})$ ゼータ類と $Q(\sqrt{2})$ ゼータ類の組み合わせ（レゴブロック）で表現できるという面白いことになっているようである。

●ここ 1 カ月ほどでわかったことは、虚 2 次体ゼータと実 2 次体ゼータは根底で分かちがたく結びついているという事実である。そうだったのか・・・

虚 2 次体ゼータの親分は $L(s)$ である。実 2 次体ゼータの親分は $\zeta(s)$ である。前者は $Q(\sqrt{-1})$ に関係し、後者は $Q(\sqrt{1})$ に関係する。

先に述べたとおり、 $Q(\sqrt{1})$ は有理数体に戻るが、しかし、やはり $\zeta(s)$ は $\cos$ 級数から飛び出てくることがわかるように、実 2 次体に属すると考えるのが適切である。

●上で述べたことは、

「**実 2 次体ゼータは $\cos$ 級数から生まれる。虚 2 次体ゼータは $\sin$ 級数から生まれる。**」
という昔に発見した基本原理に関係している。

この原理は美しく強力であり、私の研究の基礎を成している。

=====

2021. 10. 17 杉岡幹生

参考文献

- ・「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）
- ・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）