

< 新型母等式、ゼータの香りの漂う公式 その4 >

今回は、新型母等式を5回微分した式を見ることにする。(その216)は、L(1)類と(2)類乗算等式のことを書いたので、流れとしては(その215)の続きである。

まず新型母等式は次の①である。その5回微分がζ(6)の分割に対応する。

$$1/(1-x) - 1/(1+x) + 1/(3-x) - 1/(3+x) + 1/(5-x) - 1/(5+x) + \dots = (\pi/2)\tan(\pi x/2) \quad \text{----①}$$

以下ではこれまでと同様に、 $\zeta(6)$ は $Z(6)$ として求めていく。 $Z(s)$ は次のもので、本質的に $\zeta(s)$ に等しい。以下のように変形でき、それは $\zeta(s)$ そのものである。

$$Z(s) = 1 + 1/3^s + 1/5^s + 1/7^s + 1/9^s + 1/11^s + \dots \quad \text{----(1)}$$

$$\begin{aligned} Z(s) &= 1 + 1/3^s + 1/5^s + 1/7^s + 1/9^s + 1/11^s + \dots \\ &= 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + 1/5^s + 1/6^s + 1/7^s + \dots - (1/2^s + 1/4^s + 1/6^s + \dots) \\ &= \zeta(s) - 1/2^s \zeta(s) \\ &= (1 - 1/2^s) \zeta(s) \quad \text{----- (2)} \end{aligned}$$

これより、 $\zeta(6)$ の分身の値は $Z(6)$ のそれを見ればよいと分かる。 $\zeta(6)$ は $\zeta(6) = \pi^6/945$ であり、(2)より $Z(6) = \pi^6/960$ となる。

では、以下に①を5回微分した式とそれから得られる $Z(6)$ の2分割の結果を示す。(その17) 参照。

<①を5回微分した式>

$$\begin{aligned} 1/(1-x)^6 + 1/(1+x)^6 + 1/(3-x)^6 + 1/(3+x)^6 + 1/(5-x)^6 + 1/(5+x)^6 + \dots \\ = (\pi/2)^6 \{2 + 11\sin^2(\pi x/2) + 2\sin^4(\pi x/2)\} / \{15\cos^6(\pi x/2)\} \quad \text{----②} \end{aligned}$$

■Z(6) 2分割

②の x に $3/4$ を代入すると、下記A1が得られる。

②の x に $1/4$ を代入すると、下記A2が得られる。

$$A1 = 1 + 1/7^6 + 1/9^6 + 1/15^6 + 1/17^6 + 1/23^6 + \dots = \alpha^6 (2 + 11\sin^2\beta + 2\sin^4\beta) / (15\cos^6\beta)$$

$$A2 = 1/3^6 + 1/5^6 + 1/11^6 + 1/13^6 + 1/19^6 + 1/21^6 + \dots = \alpha^6 (2 + 11\sin^2\alpha + 2\sin^4\alpha) / (15\cos^6\alpha)$$

表記を簡単にするため、 $\alpha = \pi/8$ 、 $\beta = 3\pi/8$ とした。例えば、 $\sin^3\alpha$ は $\sin^3(\pi/8)$ である。

$A_1 + A_2 = Z(6)$ となる。 A_1 と A_2 が $Z(6)$ の 2 分身である。

このようにして $Z(6)$ すなわち $\zeta(6)$ の 2 分割が得られた。

②の x に $7/8$, $5/8$, $3/8$, $1/8$ を代入すると、 $Z(6)$ の 4 分割が得られることも 3 年前の ([その 1 7](#)) と同じである。

繰り返しになるが、3 年前は簡潔な②に到達していなかった。本質的に同じとはいえ、計算を工夫して $Z(6)$ の分割を出していたのであった。

なお、②の x に $1/2$ を代入すれば、 $Z(6)$ そのものが得られることはいうまでもない。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

●

$$\begin{aligned} & 1/(1-x)^3 - 1/(1+x)^3 + 1/(3-x)^3 - 1/(3+x)^3 + 1/(5-x)^3 - 1/(5+x)^3 + \dots \\ &= \{1/(1-x) - 1/(1+x) + 1/(3-x) - 1/(3+x) + 1/(5-x) - 1/(5+x) + \dots\} \times \{1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2 + 1/(5-x)^2 + 1/(5+x)^2 + \dots\} \end{aligned}$$

少なくとも $0 < x < 1$ で成り立つ。

これは、([その 2 1 5](#)) の後半で導いた $L(1)$ 類と (2) 類乗算等式であるが、何度見ても味わいがある。以下のようにになっている。

左辺 = $L(3)$ やその分身を生み出す。

右辺一番目 = $L(1)$ やその分身を生み出す。

右辺 2 番目 = $\zeta(2)$ やその分身を生み出す。

([その 2 1 6](#)) で見たように、 $L(1)$ 類と (2) 類乗算等式を微分していくことで、 $L(3)$ 類、 $\zeta(4)$ 類、 $L(5)$ 類、 $\zeta(6)$ 類、 $\dots$ が、 $L(1)$ 類と $\zeta(2)$ 類だけから構成されていく。「したがってゼータでは $L(1)$ と $\zeta(2)$ が最も大事!」というもの凄いことを、 $L(1)$ 類と (2) 類乗算等式は示しているのである。

● ゼータの研究において、私は「 $L(s)$ が先か? $\zeta(s)$ が先か?」をつねに問うてきた。すなわち、「どちらがより根源的なゼータなのだろうか?」と。

それを問うたびに「どっちが根源とは言い切れない $\dots$ 」という感覚を抱いてきた。 $L(1)$ 類と (2) 類乗算等式は、まさにそれを示している!

$L(1)$ 類と $\zeta(2)$ 類が同格の立場で、協力して、 $L(3)$ 類、 $\zeta(4)$ 類、 $L(5)$ 類、 $\zeta(6)$ 類、 $\dots$ を作り上げていっていたのである。

- $L(s)$ も $\zeta(s)$ も 方程式のゼータ である。

つまりは、 $L(s)$ は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のゼータであり、 $\zeta(s)$ は（私の研究では）実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{1})$ のゼータである。後者は、 $\sqrt{1}=1$ だから、結局は、有理数体に戻ってしまう。よって、 $\zeta(s)$ は有理数体のゼータであるといえる。

一方、 $L(s)$ と $\zeta(s)$ は 保型形式のゼータ でもある。保型形式ゼータと方程式ゼータは、別の種類のゼータ関数である。まったく別種のゼータ関数であるにもかかわらず、ふしぎなことに

保型形式のゼータ＝方程式のゼータ ----③

という関係が成り立つ。

定義がまるで違うゼータが一致してしまうという摩訶不思議なことが起こるのである！（③の成立は平方剰余の相互法則によって引き起こされる）

上で述べたことは、 $L(s)$ 、 $\zeta(s)$ を含む $L(\chi, s)$ という一次のゼータの話である。

③の関係は、楕円曲線のゼータなどの 2 次のゼータでも起こり、それは谷山・志村予想として知られていた。それがワイルズによって解かれ、それに付随してフェルマー予想も解かれたことはあまりに有名な話である。

=====

2021. 10. 10 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）