

＜ L(1)類と(2)類乗算等式 ＞

前回の(その215)の最後のメモで次の等式を導いた。この式を特別に“L(1)類と(2)類乗算等式”と呼ぶことにしたい。

$$\begin{aligned} & 1/(1-x)^3 - 1/(1+x)^3 + 1/(3-x)^3 - 1/(3+x)^3 + 1/(5-x)^3 - 1/(5+x)^3 + \dots \\ = & \{1/(1-x) - 1/(1+x) + 1/(3-x) - 1/(3+x) + 1/(5-x) - 1/(5+x) + \dots\} \times \{1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2 + 1/(5-x)^2 + 1/(5+x)^2 + \dots\} \end{aligned} \quad \text{-----①}$$

これは、少なくとも $0 < x < 1$ で成り立つ。

簡単に導出できるとは言え、この式は味わい深い式であり、ゼータにおいて様々なことを教えてくれる。

①の導出を再度、行っておく。新型母等式の0回微分、1回微分、2回微分の式を示す。

＜0回微分＞（新型母等式そのもの）

$$1/(1-x) - 1/(1+x) + 1/(3-x) - 1/(3+x) + 1/(5-x) - 1/(5+x) + \dots = (\pi/2) \tan(\pi x/2)$$

＜1回微分＞

$$1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2 + 1/(5-x)^2 + 1/(5+x)^2 + \dots = (\pi/2)^2 / \cos^2(\pi x/2)$$

＜2回微分＞

$$1/(1-x)^3 - 1/(1+x)^3 + 1/(3-x)^3 - 1/(3+x)^3 + 1/(5-x)^3 - 1/(5+x)^3 + \dots = (\pi/2)^3 \sin(\pi x/2) / \cos^3(\pi x/2)$$

これら右辺の三角関数の関係から、①が成り立つことが即座に分かる。

(導出終わり)

前回の最後でも述べた通り、左辺はL(3)やその分身を生み出す式となっている。

また①右辺の初めの方は、L(1)やその分身を生み出す式、後の式は、と(2)やその分身を生み出す式となっている。すなわち、次のようになっている。

$$1/(1-x)^3 - 1/(1+x)^3 + 1/(3-x)^3 - 1/(3+x)^3 + \dots = \text{L(3)やその分身を生み出す式}$$

$$1/(1-x) - 1/(1+x) + 1/(3-x) - 1/(3+x) + \dots = \text{L(1)やその分身を生み出す式}$$

$$1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2 + \dots = \text{と(2)やその分身を生み出す式}$$

前回はその関係を次のように表現した。

$$[\text{L(3)家族}] = [\text{L(1)家族}] \times [\text{と(2)家族}]$$

①を“L(1)類と(2)類乗算等式”と名付けた理由がこれですこし分かっていただけたかと思う。“類”は種類の類であり、家族のような意味である。

L(3)家族は、L(1)家族とと(2)家族から生み出されるのである。

①とそれを微分した式を用いることで以下が成り立つ。L(3)家族も一緒に書く。

L(3) 家族は、L(1) 家族と ζ(2) 家族から生み出される。
 ζ(4) 家族は、L(1) 家族と ζ(2) 家族から生み出される。
 L(5) 家族は、L(1) 家族と ζ(2) 家族から生み出される。
 ζ(6) 家族は、L(1) 家族と ζ(2) 家族から生み出される。
 L(7) 家族は、L(1) 家族と ζ(2) 家族から生み出される

・
 ・
 ・

と、こんなふうにとどこまでも $L(2n-1)$ と $\zeta(2n)$ は L(1) 家族と ζ(2) 家族のみで構成できていく。

さて、

$$1/(1-x) - 1/(1+x) + 1/(3-x) - 1/(3+x) + \dots = A$$

$$1/(1-x)^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(3-x)^2 + 1/(3+x)^2 + \dots = B$$

とおくことにしよう。

すると、上記の関係は次のようになる。

$$1/(1-x)^3 - 1/(1+x)^3 + 1/(3-x)^3 - 1/(3+x)^3 + \dots = A \cdot B \quad \text{----②}$$

$$1/(1-x)^4 + 1/(1+x)^4 + 1/(3-x)^4 + 1/(3+x)^4 + \dots = (1/3) B^2 + (2/3) A^2 \cdot B \quad \text{----③}$$

$$1/(1-x)^5 - 1/(1+x)^5 + 1/(3-x)^5 - 1/(3+x)^5 + \dots = (2/3) A B^2 + (1/3) A^3 \cdot B \quad \text{----④}$$

$$1/(1-x)^6 + 1/(1+x)^6 + 1/(3-x)^6 + 1/(3+x)^6 + \dots = (2/15) B^3 + (11/15) A^2 \cdot B^2 + (2/15) A^4 \cdot B \quad \text{----⑤}$$

$$1/(1-x)^7 - 1/(1+x)^7 + 1/(3-x)^7 - 1/(3+x)^7 + \dots = (17/45) A B^3 + (26/45) A^3 B^2 + (2/45) A^5 \cdot B \quad \text{----⑥}$$

$$1/(1-x)^8 + 1/(1+x)^8 + 1/(3-x)^8 + 1/(3+x)^8 + \dots \\
= (17/315) B^4 + (180/315) A^2 \cdot B^3 + (114/315) A^4 \cdot B^2 + (4/315) A^6 \cdot B \quad \text{----⑦}$$

・
 ・

眺めると分かる通り、左辺のゼータは A と B のみからなる。すなわち L(1) 家族、ζ(2) 家族から構成できると分かる。 言い換えると、L(2n-1) と ζ(2n) は、有限個の L(1) 類と ζ(2) 類のレゴブロックから構成されると言える。

例えば、④では「L(5) は L(1) と ζ(2) から構成される。L(5) 分身は L(1) 分身と ζ(2) 分身から構成される。」と
 いうことを示している（分身は、無数の異なる分割に対応したものがある！）。

上記一連の式を眺めると、さまざまなことに気づく。

L(1)類と(2)類乗算等式(①)が成り立つから、例えば、 $L(3) = \pi^3/32$ 、 $\zeta(4) = \pi^4/90$ などこれら特殊値がきちりと求まると言える。一方、L(4)や $\zeta(5)$ はこんなふうにきちり求まらず、現代でもよく分からないものと言われている。

なぜ分からないのか？ それは、①の左辺を微分しても、

$$\begin{aligned} & 1/(1-x)^4 - 1/(1+x)^4 + 1/(3-x)^4 - 1/(3+x)^4 + \dots \\ \text{や} & 1/(1-x)^5 + 1/(1+x)^5 + 1/(3-x)^5 + 1/(3+x)^5 + \dots \end{aligned}$$

が出てこないからである(符号に着目!)。どんなにがんばっても、それらを有限個のAとBで表現できないのである。面白いではないか。

さらに、上記一連の式(②~⑧)の右辺に見える係数を全部足すと1になっている。例えば、⑥では、

$$17/45 + 26/45 + 2/45 = 1$$

である。

これらの係数は、上方の<0回微分>(新型母等式そのもの)を何度も微分して現れる三角関数につく係数と一致している。3年前に(その23)の[6]で提示した私の予想と本質的に同じである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

● <0回微分>、<1回微分>、<2回微分>の3式と③~の式は、ここ3年やってきたゼータ分割の母等式と本質的には同じである。しかし、3年前にはL(1)類と(2)類乗算等式(①)の関係には気づいていなかった。

①を通して見ると、こんなにも風景が違って見えるものなのか・・・と、ふしぎな感覚におそわれる。

● $\zeta(s)$ と $L(s)$ に関しては、 $\zeta(2)$ と $L(1)$ が大事(根本)だ!といえそうだ。これまでそんな認識はなかった。

● $1/(1-x)^5 - 1/(1+x)^5 + 1/(3-x)^5 - 1/(3+x)^5 + \dots = (2/3)A B^2 + (1/3)A^3 \cdot B$ -----④

例えば、④のxに1/2を代入すると、左辺から出たL(5)は、右辺からのL(1)と $\zeta(2)$ のレゴブロックで作られると分かる。

例えば、④のxに1/4, 3/4を代入すると、L(5)のそれぞれの2分身は、L(1)2分身と $\zeta(2)$ 2分身のそれぞれのレゴブロックで作られると分かる。

また例えば、④のxに1/8, 3/8, 5/8, 7/8を代入すると、L(5)のそれぞれの4分身は、L(1)4分身と $\zeta(2)$ 4分身のそれぞれのレゴブロックで作られる。

さらに・・・

- これまで何度か述べてきたが、 $L(s)$ や $\zeta(s)$ では、明示的な特殊値を研究することが非常に大事である。
 $\zeta(s)$ ではなぜ $s=2, 4, 6 \dots$ というようなたったそれだけの数の所をよく研究されているかということ、そこにゼータの神秘が凝縮されているからと思う。岩澤理論はその方向であるし、本ゼータの香りの漂うシリーズ（ゼータ分割の研究）でもそうである。

昔に開発したテイラーシステムによると、 $\zeta(2)$ 、 $\zeta(4)$ 、 $\zeta(6) \dots$ は $\zeta(s)$ の自明な零点によって生み出されてくる。零点が関係しているから、 $\zeta(2)$ 、 $\zeta(4)$ 、 $\zeta(6) \dots$ が大事！と言える。

そして、それは非自明な零点にまで関係しているはずである。その深い地点へと通じる洞窟はまだ発見できていない。

=====

2021. 10. 03 杉岡幹生