

＜ 新型母等式、ゼータの香りの漂う公式 その2 ＞

ここしばらく双曲線ゼータの方面を探索したので、ここで本流ともいうべき、ゼータの香りの漂う公式に戻りたい。

([その208](#))で「ゼータの香りの漂う公式」の新型母等式を紹介した。そこでは0回~2回微分の式を紹介したが、今回は3回微分の式を紹介したい。3回微分は $\zeta(4)$ の分割に対応する。

その紹介の前に「ゼータの香りの・・・」シリーズのこれまでの流れをすこし振り返ってみたい。数学の研究というのはどこかを探検しているかのような感覚がある。そのイメージもいくつか異なるものがある。大河を探検しているイメージの時もあれば、地下の洞窟を掘り進んでいる場合もある。あるいは、漁場で魚をとったり、ある高い山に登ったり、鉱山で様々な鉱石を見つけたり・・・と様々である。

大河の探検ということであれば、最近やっていた双曲線ゼータは、香りの漂う公式(アマゾン川)の周辺にある湖といったイメージである。その湖で何匹かの魚を捕まえた。

さて、ゼータの香りの漂う公式である。

このシリーズの投稿をはじめて3年半になるが、ざっと振り返っても様々な発見があった。

香りの漂う公式は約12年前に見出したものだが、その神秘的な姿に、私はゼータ以上に深いなにかを感じていた。

http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page201.htm

http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page106.htm

ただ、当時はそれ以上はなにもわからなかった。3年半前にその式にふと複素数を代入した。すると、驚くべきことに、ゼータの分身たちが雨あられと降ってくるのが分かった。私はその光景に感動した。宇宙の底が抜けたと感じた。いまはもうだいぶ不感症となったが、それでもその感動と震えははまだ残っている。

しばらくして、ゼータの香りの漂う公式は、部分分数展開式と本質的に等しいとわかった。部分分数展開式は、おそらくオイラーが発見したものである。部分分数展開式の方が、実数の範囲だけで分身が生み出せるので、それ以来、そちらを使っている。

ゼータの分身たちに対し、佐藤郁郎氏の示唆もあってその分身の値を解にもつ代数方程式を見出した。そして $L(1)$ ではパスカルの三角形に、 $\zeta(2)$ ではチェビシエフ多項式に関係した代数方程式を得た。それらの方程式を固有方程式としてもつ実対称行列(エルミート行列)を発見した。きれいな行列である。それを実-双対角対称行列と名づけ、その行列の集合が“体を成す”ことを証明した。体を成す行列があったのだ!(ふつう行列は可換ですらないのに!)

http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu2/14850_o9.pdf

さらにそれらの固有方程式の多項式関数を解にもつ微分方程式を発見した。

http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu2/14119_t8.pdf

この発見は困難を極め、4ヶ月もかかった。苦労はしたが、式の優美さに心が洗われた。とくに $L(1)$ の方はふしぎな形をしている。その式はガウスの超幾何微分方程式の一種であった($L(1)$ の方は、変数変換でガウスのそれに移行できる)。

そして先日、これまでの香りの漂う公式をちょっと変形した新型母等式を見出した。

超大雑把に3年半を振り返ると、こんな感じである。掘り進めた洞窟の端に、見つけた鉱石を磨かず（予想や問題として）そのまま置きながら、前へ前へと掘り進んできた。
以上。

さて、前置きはこの辺にして、冒頭で述べた新型母等式の3回微分の式の話に移りたい。

ゼータの分割という興味深い現象を調べるための道具として、次の①の部分分数展開式とそれを微分（n回微分）した式を使ってきた。

$$1/(1^2-x^2) + 1/(3^2-x^2) + 1/(5^2-x^2) + \dots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2) \text{ ----①}$$

最近、上とは違った形の次の②の部分分数展開式（新型母等式）を見出した。

注記：②は少なくとも $0 < x < 1$ では確実に成り立つ。ゼータ分割を調べるにはそれで十分。

$$1/(1-x) - 1/(1+x) + 1/(3-x) - 1/(3+x) + 1/(5-x) - 1/(5+x) + \dots = (\pi/2)\tan(\pi x/2) \text{ ----②}$$

じつは、①と②は本質的に同じである。①の簡単な変形で②にもっていける。ならば、なぜわざわざ新型母等式というのか？と思われるかもしれない。その理由は、微分を考えると、①から出発した場合と②から出発した場合は、まるでその後の展開が違ってくるからである。

以下ではこれまでと同様に、 $\zeta(4)$ と本質的に同じ $Z(4)$ の分身として求めている。 $Z(s)$ は次のもので、本質的に $\zeta(s)$ に等しい。以下のように変形でき、それは $\zeta(s)$ そのものである。

$$Z(s) = 1 + 1/3^s + 1/5^s + 1/7^s + 1/9^s + 1/11^s + \dots \text{ ---- (1)}$$

$$\begin{aligned} Z(s) &= 1 + 1/3^s + 1/5^s + 1/7^s + 1/9^s + 1/11^s + \dots \\ &= 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + 1/5^s + 1/6^s + 1/7^s + \dots - (1/2^s + 1/4^s + 1/6^s + \dots) \\ &= \zeta(s) - 1/2^s \zeta(s) \\ &= (1-1/2^s) \zeta(s) \text{ ----- (2)} \end{aligned}$$

これより、 $\zeta(4)$ の分身の値は $Z(4)$ のそれを見ればよいと分かる。 $\zeta(4)$ は $\zeta(4) = \pi^4/90$ であり、(2)より $Z(4) = \pi^4/96$ となる。

それでは、②の3回微分した式と、それから得られる $Z(4)$ の2分割の結果を示す。[\(その177\)](#) 参照。

<②を3回微分した式>

$$1/(1-x)^4 + 1/(1+x)^4 + 1/(3-x)^4 + 1/(3+x)^4 + 1/(5-x)^4 + 1/(5+x)^4 + \dots$$

$$= (\pi/2)^4 \{1+2\sin^2(\pi x/2)\} / \{3\cos^4(\pi x/2)\} \quad \text{---③}$$

■Z(4) 2分割

③の x に値 3/4 を代入すると、下記 A1 が得られる。

③の x に値 1/4 を代入すると、下記 A2 が得られる。

$$A1 = 1 + 1/7^4 + 1/9^4 + 1/15^4 + 1/17^4 + 1/23^4 + \dots = (\pi/8)^4 \{1+2\sin^2(3\pi/8)\} / \{3\cos^4(3\pi/8)\}$$

$$A2 = 1/3^4 + 1/5^4 + 1/11^4 + 1/13^4 + 1/19^4 + 1/21^4 + \dots = (\pi/8)^4 \{1+2\sin^2(\pi/8)\} / \{3\cos^4(\pi/8)\}$$

A1 + A2 = Z(4) となっている。A1, A2 が Z(4) の 2分身である。

右辺の三角関数の値を数値で出すと、A1, A2 は以下となる。

$$A1 = (64+44\sqrt{2}) (\pi/8)^4 / 3$$

$$A2 = (64-44\sqrt{2}) (\pi/8)^4 / 3$$

このようにして Z(4) すなわち (4) の 2分割が得られた。両者を足し算すると、次の通り Z(4) の値が出る。

$$A1 + A2 = (64+44\sqrt{2}) (\pi/8)^4 / 3 + (64-44\sqrt{2}) (\pi/8)^4 / 3 = \pi^4 / 96 = Z(4)$$

Z(4) 2分身 A1, A2 の値は、このように (πを除いて) 作図可能数となった。作図可能数とは、ギリシャ時代以来特別視されてきた数であり、定規とコンパスを用いて得られる数である。つまり、平方根√と有理数から構成される数のことである (³√とか⁷√とかそんなものがない数)。

と (4) では、2分割のみならず、様々な分割が可能である。5分身の値は作図可能数となるが、7分身の値は作図可能数とはならない。また 13分身の値は作図可能数ではないが、17分身の値は作図可能数である。それは5と17は作図可能数であるが、7と13は作図可能数でないことに関係している。⇒ ([その171](#))

作図可能数となる場合は、最終的に二次方程式を解くことに帰着されることを意味している。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

● 作図可能数に関しては、ガウス (1777-1855) が大きな貢献をしている。

ギリシャ時代以来、1796年まで、次の正多角形 (正n角形) が定規とコンパスを用いて作図できることが知られていた。

n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, . . .

誰もこれ以外に見落としている数があるなどとは思っていなかった。ところが1796年に青年ガウスは、突然、正十七角形が定規とコンパスで作図可能だ！と発表して、数学界に衝撃を与えた。彼は2000年間見落とされていたピースを埋めたのだった。

$n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, \dots$

ガウス自身、この発見を大変重要視し、自分の墓石に正十七角形を描いてほしいと求めたくらいである。

●ゼータ分身に関する微分方程式は、上方で述べた通り、 $L(1)$ と (2) については見つかった。

$L(3)$ もすぐに出ると思ったが、簡単ではなく、いまだに見つけられていない。気になっているテーマではあるが、 $L(1)$ と (2) の美しい姿に満足してしまい、あまり熱心に探せていないのも未発見の一因となっている。どんな姿をしているのだろうか。

=====

2021.9.20 杉岡幹生

<参考文献>

●「マスペディア 1000」（リチャード・エルウィス著、宮本寿代訳、ディスカヴァー・トゥエンティワン）