

< 双曲線ゼータとその派生式 >

9年前に私は、ラマヌジャン式を研究している途上、新種の？ゼータを発見していた。自分の下記サイトでも紹介した下式のものである。[ファン・ネス彗星 その1](#)、[ファン・ネス彗星 その2](#)
分かりやすくするために、色を用いた。

$$\begin{aligned} & 1/(e^{2\pi}-1) + 2/(e^{4\pi}-1) + 3/(e^{6\pi}-1) + 4/(e^{8\pi}-1) + \dots \\ & = (1/4) \{ 1/\sinh^2(\pi) + 1/\sinh^2(2\pi) + 1/\sinh^2(3\pi) + 1/\sinh^2(4\pi) + \dots \} \quad \text{---①} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/(e^{2\pi}-1) - 2/(e^{4\pi}-1) + 3/(e^{6\pi}-1) - 4/(e^{8\pi}-1) + \dots \\ & = (1/4) \{ 1/\cosh^2(\pi) + 1/\cosh^2(2\pi) + 1/\cosh^2(3\pi) + 1/\cosh^2(4\pi) + \dots \} \quad \text{---②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/(e^{4\pi}-1) - 2/(e^{8\pi}-1) + 3/(e^{12\pi}-1) - 4/(e^{16\pi}-1) + \dots \\ & = (1/4) \{ 1/\cosh^2(2\pi) + 1/\cosh^2(4\pi) + 1/\cosh^2(6\pi) + 1/\cosh^2(8\pi) + \dots \} \quad \text{---③} \end{aligned}$$

右辺は②の類似物のようになっていて面白い形をしている。それを新種のゼータのように感じて“双曲線ゼータ”と名付けた。なお、 $\cosh(x)$ 、 $\sinh(x)$ は、それぞれハイパボリックコサイン、ハイパボリックサインであり、 $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ 、 $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ である。これら双曲線関数に関係するので“双曲線ゼータ”としたのである。

そしてラマヌジャンの式を援用することで、いくつかの双曲線ゼータの特殊値まで次のように求めていた。

$$1/\sinh^2(\pi) + 1/\sinh^2(2\pi) + 1/\sinh^2(3\pi) + \dots = 1/6 - 1/(2\pi) \quad \text{---④}$$

$$1/\sinh^4(\pi) + 1/\sinh^4(2\pi) + 1/\sinh^4(3\pi) + \dots = 1/(3\pi) - 11/90 + (\omega/\pi)^4/30 \quad \text{---⑤}$$

$$1/\sinh^6(\pi) + 1/\sinh^6(2\pi) + 1/\sinh^6(3\pi) + \dots = 191/1890 - 4/(15\pi) - (\omega/\pi)^4/30 \quad \text{---⑥}$$

これらは、②、④、⑥に対応しているかのようである。

ω はレムニスケート収率で、レムニスケート曲線における円の円周率に対応するものであり、ガウスやオイラーによって深く研究された重要な値である。レムニスケート曲線は、[こんな八の字型](#)をしている。（交点からの長径の長さを1として）レムニスケートの周長は 2ω となり、半径1の円の円周の 2π に対応している。
 $\omega = 2.6220575542921198 \dots$

これらははじめての結果か！？と思ったが、数学者のM先生によると、

あまり知られていないが、これは結構昔から考えられていて最初の特種な場合はコーシーが与えた。またラマヌジャンもこの種の級数の研究を行っている。下記の論文も参照されたい。

<http://kaken.nii.ac.jp/d/p/17540053.en.html>

ということであった。

もう研究されているとわかり、がっかりした。上記 URL の論文は有料のようであり、全く見ていないが、既に研究されているということから、双曲線ゼータに関してはやる気が失せ、それっきりになった。それでも自分の中ではなにかずっと気になる存在でありつづけた。

そして先日、自分のサイトを読み直していて気付いたことがあり、計算をして、面白い結果が出たので紹介したい。次のものである。cosh は ch と略記した。これ以降、cosh は ch、sinh は sh と略記する。

$$\begin{aligned} & 1/(e^{4\pi}-1) - 1/(e^{12\pi}-1) + 1/(e^{20\pi}-1) - 1/(e^{28\pi}-1) + \dots \\ & = (1/2) \{ 1/\text{ch}(4\pi) + 1/\text{ch}(8\pi) + 1/\text{ch}(12\pi) + 1/\text{ch}(16\pi) + \dots \} \quad \text{----}\textcircled{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/(e^{2\pi}-1) + 1/(e^{6\pi}-1) - 1/(e^{10\pi}-1) - 1/(e^{14\pi}-1) + 1/(e^{18\pi}-1) + 1/(e^{22\pi}-1) - 1/(e^{26\pi}-1) - 1/(e^{30\pi}-1) + \dots \\ & = \text{ch}(2\pi)/\text{ch}(4\pi) + \text{ch}(4\pi)/\text{ch}(8\pi) + \text{ch}(6\pi)/\text{ch}(12\pi) + \text{ch}(8\pi)/\text{ch}(16\pi) + \dots \quad \text{----}\textcircled{8} \end{aligned}$$

このような優雅な式が出た。⑧左辺の符号は、+ + - - + + - - ・ ・ となっているので注意されたい。

これらを読者はどう思われるだろうか。私には、シンプルでふしぎな式に見える。

Excel で数値検証を行ったが、両式とも正しい結果であった。収束は異常に速い。

⑦、⑧の導出方法を概略だけ示す。

<導出方法>

[ファン・ネス彗星 その1](#)において、ある母関数と、フーリエ級数

$$\sin x / (\text{ch}(a) - \cos x) = 2 \sum_{(n=1 \sim \infty)} e^{-n \cdot a} \cdot \sin(nx) \quad (-\pi \leq x \leq \pi, a > 0) \quad \text{----}\textcircled{9}$$

を用いて、次の[A]式を得た。

$$\begin{aligned} & \sin(x)/(e^{2\pi}-1) + \sin(2x)/(e^{4\pi}-1) + \sin(3x)/(e^{6\pi}-1) + \sin(4x)/(e^{8\pi}-1) + \dots \\ & = (1/2) \{ \sin x / (\text{ch}(2\pi) - \cos x) + \sin x / (\text{ch}(4\pi) - \cos x) + \sin x / (\text{ch}(6\pi) - \cos x) + \dots \} \quad \text{----}[A] \end{aligned}$$

この[A]式の x に $3\pi/4$ 、 $\pi/4$ を代入すると、それぞれ A1 式、A2 式を得る。それらは少し複雑な形をしているので、略す。

A1-A2 から、⑦が出る。

A1+A2 から、⑧が出る。

以上。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

- <導出方法>の中の[A]式を（n回）微分した式からも、様々な結果が得られる。冒頭での「ファン・ネス彗星」で示しているのは、そのような方法で出したものである。

- 「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）には、⑨のフーリエ級数の他に、

$$\operatorname{sh}(a) / (\operatorname{ch}(a) - \cos x) = 1 + 2 \sum_{(n=1 \sim \infty)} e^{-n \cdot a} \cdot \cos (nx) \quad (-\pi < x < \pi, a > 0)$$

というフーリエ級数も載っている。

この式からも、双曲線ゼータ周辺で面白い結果が色々出ると分かった。また紹介したい。

- いま思うと、M先生の言葉にがっかりしたのが、よくなかった。

知られていようが、知られていまいが、どんどんと独自に進めるべきであった。そうして最終的に多くの結果が出た場合、全部が知られているなどいうことはたぶんない。何割かは新しい結果となる。また、多くが知られていたとしても、登っていく登山ルートが数学者のそれとはまったく別ということも非常に多い。

別ルートを行く（別手法で導く）ということが、数学では大事である。

=====

2021.8.12 杉岡幹生

<参考文献>

「数学の夢 素数からのひろがり」（黒川信重著、岩波書店）

「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）