

< L(s) リーマン予想と同値の予想 B-1 >

([その196](#))、([その205](#)) では、以前に下記 URL で導いた $\zeta(s)$ リーマン予想と同値の予想 A-1～予想 A-3 を取り上げ、再考した。「ヘール・ポップ彗星 その1」http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page132.htm

([その204](#)) で出した新型母関数での公式群を眺めていると、 $\zeta(s)$ と $L(s)$ とは相補的になっている感じがあり、よって一方のリーマン予想が解けるともう一方のリーマン予想も自然に解けるというふうになっているような気がする。

そこで、 $L(s)$ のリーマン予想が気になりだした。これまで $\zeta(s)$ リーマン予想の同値命題（予想 A-1～A-4）ばかり考察してきたが、ここに来て、その類似の $L(s)$ リーマン予想の同値予想も出しておきたいと思った。

じつはそれは簡単に出る。

$\zeta(s)$ の予想 A-1 を出したとき、 $L(s)$ の同値予想もほぼ同時に分かっていたのだが、サイトでは書き下してはいなかった。いわば頭の中で空想的に書いていたのみであった。 $\zeta(s)$ リーマン予想と $L(s)$ リーマン予想を対の形で考察したいので、ここで導出しておく。

$\zeta(s)$ 予想 A-1～予想 A-4 に対応する形で、 $L(s)$ は予想 B-1～予想 B-4 で出したいが、予想 A-2 は x べき級数のわかりにくい（数値検証しにくい）形なので、それは飛ばして書く。つまり、予想 B-1、予想 B-3、予想 B-4 を書いていきたい。ただし、今回は数値検証を行った予想 B-1 のみを書く。

導出方法は、「[ヘール・ポップ彗星 その1](#)」の $\zeta(s)$ と同様にできるので略す。というか、 $L(s)$ は最初から交代級数の形なので、 $\zeta(s)$ の場合のような交代級数にするというひねりをわざわざ加える必要もなく、 $L(s)$ の場合はもっと簡単に出る。

$L(s)$ リーマン予想と同値の予想 B-1 は、次のようになる。 $\log 1$ は 0 だが、あえて $\log 1$ のままおいた。

予想 B-1 ($L(s)$ リーマン予想と同値)

c を $0 < c < 1$ の実数とする。次の x に関する二つの方程式を考える。

この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのは c が $1/2$ のときのみであろう。

$$\cos(x \cdot \log 1) / 1^c - \cos(x \cdot \log 3) / 3^c + \cos(x \cdot \log 5) / 5^c - \cos(x \cdot \log 7) / 7^c + \dots = 0$$

$$\sin(x \cdot \log 1) / 1^c - \sin(x \cdot \log 3) / 3^c + \sin(x \cdot \log 5) / 5^c - \sin(x \cdot \log 7) / 7^c + \dots = 0$$

$\zeta(s)$ の予想 A-1 と同じく、これも簡潔で美しい。 $c=1/2$ の場合の次式に対し数値検証も行った。

$$\cos(x \cdot \log 1) / \sqrt{1} - \cos(x \cdot \log 3) / \sqrt{3} + \cos(x \cdot \log 5) / \sqrt{5} - \cos(x \cdot \log 7) / \sqrt{7} + \dots = 0$$

$$\sin(x \cdot \log 1) / \sqrt{1} - \sin(x \cdot \log 3) / \sqrt{3} + \sin(x \cdot \log 5) / \sqrt{5} - \sin(x \cdot \log 7) / \sqrt{7} + \dots = 0$$

$L(s)$ 非自明な零点は、数学愛好家の KONO 氏に教えてもらった $L(\chi, s)$ 零点の中の $L(s)$ 零点を参考にした（下記の # の URL の所）。現在ははじめから 2 番目までの $L(s)$ 零点と零点以外の点での検証を行った。まさしく非

自明な零点でのみ上記二式は0に収束していく。その検証の仕方は「[ヘール・ボップ彗星 その1](#)」で行ったものと同様である。3番目以降の零点の数値実験もさらに加えていくが、導出過程から予想B-1が正しいことは明らかである。

(c) 2007-2016, Tomás Oliveira e Silva

See disclaimer in page

<http://sweet.ua.pt/tos/hobbies.html>

ζ(s) 予想 A-1 と L(s) 予想 B-1 を並べておく。

予想 A-1 (ζ(s)リーマン予想と同値)

c を $0 < c < 1$ の実数とする。次の x に関する二つの方程式を考える。

この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのは c が $1/2$ のときのみであろう。

$$\cos(x \cdot \log 1) / 1^c - \cos(x \cdot \log 2) / 2^c + \cos(x \cdot \log 3) / 3^c - \cos(x \cdot \log 4) / 4^c + \dots = 0$$

$$\sin(x \cdot \log 1) / 1^c - \sin(x \cdot \log 2) / 2^c + \sin(x \cdot \log 3) / 3^c - \sin(x \cdot \log 4) / 4^c + \dots = 0$$

予想 B-1 (L(s)リーマン予想と同値)

c を $0 < c < 1$ の実数とする。次の x に関する二つの方程式を考える。

この二つの方程式を同時に満足する実数解が存在するのは c が $1/2$ のときのみであろう。

$$\cos(x \cdot \log 1) / 1^c - \cos(x \cdot \log 3) / 3^c + \cos(x \cdot \log 5) / 5^c - \cos(x \cdot \log 7) / 7^c + \dots = 0$$

$$\sin(x \cdot \log 1) / 1^c - \sin(x \cdot \log 3) / 3^c + \sin(x \cdot \log 5) / 5^c - \sin(x \cdot \log 7) / 7^c + \dots = 0$$

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

● 上で見た L(s) での二式

$$\cos(x \cdot \log 1) / 1^c - \cos(x \cdot \log 3) / 3^c + \cos(x \cdot \log 5) / 5^c - \cos(x \cdot \log 7) / 7^c + \dots = 0$$

$$\sin(x \cdot \log 1) / 1^c - \sin(x \cdot \log 3) / 3^c + \sin(x \cdot \log 5) / 5^c - \sin(x \cdot \log 7) / 7^c + \dots = 0$$

これは $\log 1 = 0$ より、すなわち、次となる。

$$1 - \cos(x \cdot \log 3) / 3^\circ + \cos(x \cdot \log 5) / 5^\circ - \cos(x \cdot \log 7) / 7^\circ + \dots = 0 \quad \text{----①}$$

$$\sin(x \cdot \log 3) / 3^\circ - \sin(x \cdot \log 5) / 5^\circ + \sin(x \cdot \log 7) / 7^\circ - \dots = 0 \quad \text{-----②}$$

上式を、例えば、次の①-2、②-2 のようにもし変形できたとしたら、これは $c=1/2$ でのみ成り立つことになり ($\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ からそういえる)、 $L(s)$ リーマン予想が解けることになる。

$$1 - \{1 + 5(c - 1/2)^2\} \cdot \cos\{f(c)x\} = 0 \quad \text{----①-2}$$

$$\sin\{f(c)x\} = 0 \quad \text{----②-2}$$

その場合は $c=1/2$ として、 $1 - \cos\{f(1/2)x\} = 0$ 、 $\sin\{f(1/2)x\} = 0$ から、

$$f(1/2)x = \pm 2n\pi \quad (n=1, 2, 3 \dots)$$

となる。

$$\text{よって、} x = \pm 2n\pi / f(1/2) \quad n=1, 2, 3 \dots$$

$$\text{つまり、} \beta_n = \pm 2n\pi / f(1/2) \quad n=1, 2, 3 \dots$$

となる（方程式①、②の同時解 x は $L(s)$ の非自明な零点の虚部 β_n であるから、そうなる）

こんなふうにできれば、非自明な零点 “ $1/2 \pm i \cdot \beta_n$ ” が、複素平面上で実軸に対して対称的に並んでいる様が説明できる。単純すぎるモデルだが、こんな感じになっているのかもしれない。

●上の考察から、三角関数を無限個足し合わせた最終形が求まって、①-2、②-2 のような形にできれば、 $L(s)$ のリーマン予想は解けるとわかる。

さらに、運よく？関数 $f(c)$ の正体が求まれば、非自明な零点の $x=1/2 \pm i \cdot \beta_n$ における虚部 β_n の生成方法が求まるという夢のようなことがおこる。

と (s) リーマン予想の場合も、まったく同様に考えることができる。

●ゼータの非自明な零点は、結局、三角関数が生み出している。

=====

2021. 7. 18 杉岡幹生