＜ 新型母関数でのテイラーシステム　その１＞

前回は新しいタイプの母関数を使って、テイラーシステムからフルヴィッツ・ゼータζ(a, s)の値を導出した。その新型の母関数を使ってζ(s)やL(s)の値も導出できることが分かったので、今回はそれを報告する。

新型母関数を使うと、驚くべきことに、L(2)やζ(3)などが有理数係数のζ(n)無限和で得られるのである。

旧来の方法でもζ(n)無限和で出るが、係数にπが露わに出てくる式が圧倒的に多く、きれいな感じがしない。πが見えているので、ゼータ間の関係性（一次独立、一次従属など）がわかりにくいという欠点がある。ゼータの構造を見るためには、有理数係数式の方がよいと考えられる。

新型母関数とは、例えば、次のようなものである。

$f(x)=1/x^s+1/(1+x)^s+1/(2+x)^s+1/(3+x)^s+1/(4+x)^s+\cdots$

$g(x)=1/x^s-1/(1+x)^s+1/(2+x)^s-1/(3+x)^s+1/(4+x)^s-\cdots$

ただし、この母関数も、旧来の母関数同様、さまざまな変形が可能である。

さて、今回、得られた主な結果を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$
\begin{aligned}
L(2)=(1/4)\{&1\cdot(1-1/2^1)\cdot\zeta(2)/2^0+2\cdot(1-1/2^2)\cdot\zeta(3)/2^1\\
&+3\cdot(1-1/2^3)\cdot\zeta(4)/2^2+4\cdot(1-1/2^4)\cdot\zeta(5)/2^3\\
&+5\cdot(1-1/2^5)\cdot\zeta(6)/2^4+6\cdot(1-1/2^6)\cdot\zeta(7)/2^5\\
&+\cdots\cdots\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta(3)=(2/3)\{&(3!/1!)\cdot\zeta(4)/2^4+(4!/2!)\cdot\zeta(5)/2^5\\
&+(5!/3!)\cdot\zeta(6)/2^6+(6!/4!)\cdot\zeta(7)/2^7\\
&+(7!/5!)\cdot\zeta(8)/2^8+(8!/6!)\cdot\zeta(9)/2^9\\
&+\cdots\cdots\}
\end{aligned}
$$

ζ(n)につく係数が全て有理数になっている。L(2)、ζ(3)は、当然ながら次のものである。

$L(2)=1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+1/9^2-1/11^2+\cdots$

$\zeta(3)=1+1/2^3+1/3^3+1/4^3+1/5^3+1/6^3+\cdots$

また、L(2)とζ(2)の同時２分割ともいうべき、次のＡ、Ｂの値も得られた。

$A=1+1/5^2+1/9^2+1/13^2+1/17^2+\cdots$

$B=1/3^2+1/7^2+1/11^2+1/15^2+1/19^2+\cdots$

$$
\begin{aligned}
A=(1/4^2)\{&1\cdot\zeta(2)\cdot(3/4)^0+2\cdot\zeta(3)\cdot(3/4)^1+3\cdot\zeta(4)\cdot(3/4)^2+4\cdot\zeta(5)\cdot(3/4)^3\\
&+5\cdot\zeta(6)\cdot(3/4)^4+6\cdot\zeta(7)\cdot(3/4)^5+7\cdot\zeta(8)\cdot(3/4)^6+8\cdot\zeta(9)\cdot(3/4)^7\\
&+\cdots\cdots\}
\end{aligned}
$$

$B=(1/4^2)\{1\cdot\zeta(2)\cdot(1/4)^0+2\cdot\zeta(3)\cdot(1/4)^1+3\cdot\zeta(4)\cdot(1/4)^2+4\cdot\zeta(5)\cdot(1/4)^3$
$+5\cdot\zeta(6)\cdot(1/4)^4+6\cdot\zeta(7)\cdot(1/4)^5+7\cdot\zeta(8)\cdot(1/4)^6+8\cdot\zeta(9)\cdot(1/4)^7$
$+\cdots\cdots\}$

ここで、同時２分割の意味は、次のようになるからである。

$A-B=L(2)$

$A+B=(1-1/2^2)\cdot\zeta(2)$

L(2)の導出方法だけ記す。他も同様にできる。

[L(2)導出方法]

$g(x)=1/x^2-1/(1+x)^2+1/(2+x)^2-1/(3+x)^2+1/(4+x)^2+\cdots$ ------①

という母関数を考える。

①でｘに 1/2 を代入すると、次となる。

$g(1/2)=1/(1/2)^2-1/(3/2)^2+1/(5/2)^2-1/(7/2)^2+\cdots=2^2\cdot L(2)$ --------②

①をｘ=1 の周りでテイラー展開した結果のｘに 1/2 を代入すると、簡単な計算により次となる。

$g(1/2)=1\cdot(1-1/2^1)\cdot\zeta(2)\cdot(1/2)^0+2\cdot(1-1/2^2)\cdot\zeta(3)\cdot(1/2)^1$
$+3\cdot(1-1/2^3)\cdot\zeta(4)\cdot(1/2)^2+4\cdot(1-1/2^4)\cdot\zeta(5)\cdot(1/2)^3$
$+5\cdot(1-1/2^5)\cdot\zeta(6)\cdot(1/2)^4+6\cdot(1-1/2^6)\cdot\zeta(7)\cdot(1/2)^5$
$+\cdots\cdots$ -------③

②と③から、次となる。

$L(2)=(1/4)\{1\cdot(1-1/2^1)\cdot\zeta(2)/2^0+2\cdot(1-1/2^2)\cdot\zeta(3)/2^1$
$+3\cdot(1-1/2^3)\cdot\zeta(4)/2^2+4\cdot(1-1/2^4)\cdot\zeta(5)/2^3$
$+5\cdot(1-1/2^5)\cdot\zeta(6)/2^4+6\cdot(1-1/2^6)\cdot\zeta(7)/2^5$
$+\cdots\cdots\}$

L(2)が得られた。

（導出終わり）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このように新型母関数を使うと、有理数係数のゼータ無限和の結果として得られるのである。Excel で数値検証も行ったが、正しいものであった。

導出方法も、旧来の母関数での方法よりもより簡単になっている。旧来では、必ず途中に関数等式を使う場面が出るが、新型の方法ではその過程がない。その分、簡単になっている。

結果の収束速度に関して、新型母関数で得られたものの収束速度はかなり速い。しかし旧来の結果に比べると遅くなっている。旧来のが異常に速すぎたとも言える。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝

●旧来の $f(x)=\cos x/1^s + \cos 2x/2^s + \cos 3x/3^s + \cdot\cdot$ のような母関数でしかテイラーシステムはできないと思っていたので、今回のような簡単な母関数でよい結果が出るとは思わなかったというのが正直なところである。

旧来の方法でも有理数係数の結果が出たことはあった。が、それを出すには導出過程で“微分”という手術を施さねばならず、手間がかかるため、数例しか求めていない。⇒（その１６４）最後

●有理数係数の結果は、πが露わに見える結果より、価値が高いような気がする。
形がすっきりしていて考察しやすいし、ゼータ間の関係性（一次独立、一次従属）も見えやすい。新型母関数では、有理数係数の結果しか出ない。

● 新型母関数で $\zeta(s)$ や $L(s)$ の一般式はどうなっているのか？　それはリーマン予想に通じているのか。
旧来の母関数で導出した公式（その１６４）では、リーマン予想は解けない（ような気がする）。

● 新型母関数で $\zeta(1/2)$ は出るだろうか。⇒旧来の結果

●$L(2)$ と $\zeta(2)$ の同時２分割を再掲。

$$A = 1 + 1/5^2 + 1/9^2 + 1/13^2 + 1/17^2 + \cdots$$
$$B = 1/3^2 + 1/7^2 + 1/11^2 + 1/15^2 + 1/19^2 + \cdots$$

$$A=(1/4^2)\{1\cdot\zeta(2)\cdot(3/4)^0+2\cdot\zeta(3)\cdot(3/4)^1+3\cdot\zeta(4)\cdot(3/4)^2+4\cdot\zeta(5)\cdot(3/4)^3$$
$$+5\cdot\zeta(6)\cdot(3/4)^4+6\cdot\zeta(7)\cdot(3/4)^5+7\cdot\zeta(8)\cdot(3/4)^6+8\cdot\zeta(9)\cdot(3/4)^7$$
$$+\cdots\cdots\}$$

$$B=(1/4^2)\{1\cdot\zeta(2)\cdot(1/4)^0+2\cdot\zeta(3)\cdot(1/4)^1+3\cdot\zeta(4)\cdot(1/4)^2+4\cdot\zeta(5)\cdot(1/4)^3$$
$$+5\cdot\zeta(6)\cdot(1/4)^4+6\cdot\zeta(7)\cdot(1/4)^5+7\cdot\zeta(8)\cdot(1/4)^6+8\cdot\zeta(9)\cdot(1/4)^7$$
$$+\cdots\cdots\}$$

さて、

$$A-B=L(2)$$
$$A+B=(1-1/2^2)\cdot\zeta(2)$$

に関し、無理性でなにか言えるか？

⇒Ａ、Ｂのどちらか少なくとも一つは無理数である。

＝＝＝

2021.5.29　杉岡幹生