＜Q(√-m)とQ(√m)のゼータを同時に作る分割が存在する(予想)、Q(√-10)とQ(√10)＞

予想の確認の続きである。前回はQ(√-7)とQ(√7)で予想が成立していることを見た。

今回は、虚2次体Q(√-10)と実2次体Q(√10)で確認する。すなわち、m＝10での両2次体それぞれのゼータを同時に作ることができる分割が存在することを確認したい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜予想(改良版)＞

部分分数展開式①と、それを1回微分した式②のxに、複数のkを用いてk/(2m)を代入することで、虚2次体Q(√-m)、実2次体Q(√m)のそれぞれのゼータを同時に構成する分割を得ることができる。
ここで、mは平方因子を含まない自然数、kは1≤k<2mを満たす自然数である。

$$1/(1^2-x^2)\ +1/(3^2-x^2)\ +1/(5^2-x^2)\ +\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2) \quad ----①$$

$$1/(1^2-x^2)^2+1/(3^2-x^2)^2+1/(5^2-x^2)^2+\cdots=(\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2)-\{\pi/(8x^3)\}\tan(\pi x/2) \quad ---②$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回のm＝10の場合を具体的に述べると、次のようになる。

①と②のxに19/20, 17/20, 13/20, 11/20, 9/20, 7/20, 3/20, 1/20を代入することで、虚2次体Q(√-10)ゼータLk1(1)の8分割ができ、同時に実2次体Q(√10)ゼータLk4(2)の8分割ができる。

Lk1(s)は虚2次体Q(√-10)のゼータ関数である。Lk1(s)は私が16年前に自身のサイト(重回積分 π/20代入)で考察したものだが、次のようなゼータである。

Lk1(s)は、ディリクレのL関数L(χ,s)

$$L(\chi,s)=\chi(1)/1^s+\chi(2)/2^s+\chi(3)/3^s+\chi(4)/4^s+\chi(5)/5^s+\chi(6)/6^s+\chi(7)/7^s+\cdots$$

の一種であり、次のものである。

$Lk1(s)=1-1/3^s+1/7^s+1/9^s+1/11^s+1/13^s-/17^s+1/19^s-1/21^s+1/23^s-1/27^s-1/29^s-1/31^s-1/33^s+1/37^s-1/39^s+\cdots$

Lk1(s)は虚2次体Q(√-10)のゼータ関数で、導手N＝40を持つ。ディリクレ指標χ(n)は次の通り。

n≡1 or 7 or 9 or 11 or 13 or 19 or 23 or 37 mod 40のときχ(n)＝1,
n≡3 or 17 or 21 or 27 or 29 or 31 or 33 or 39 mod 40のときχ(n)＝-1,
その他のときχ(n)＝0となる。

よって、s＝1のLk1(1)は次となる。

$Lk1(1)=1-1/3+1/7+1/9+1/11+1/13-1/17+1/19-1/21+1/23-1/27-1/29-1/31-1/33+1/37-1/39+1/41-1/43+1/47+1/49+1/51+1/53-1/57+1/59-1/61+1/63-1/67-1/69-1/71-1/73+1/77-1/79+\cdots$

次に、Lk4(2)は実 2 次体 Q(√10)ゼータ Lk4(s)の s＝2 のものである。Lk4(s)も L(χ ,s)の一種で次の形をしたものである。

$Lk4(s)=1+1/3^s-1/7^s+1/9^s-1/11^s+1/13^s-/17^s-1/19^s-1/21^s-1/23^s+1/27^s-1/29^s+1/31^s-1/33^s+1/37^s+1/39^s+\cdots$

Lk4(s)は実2次体 Q(√10)のゼータ関数で、導手 N＝40 を持つ。ディリクレ指標 χ (n)は次の通り。

n≡1 or 3 or 9 or 13 or 27 or 31 or 37 or 39 mod 40 のとき χ (n)＝1,

n≡7 or 11 or 17 or 19 or 21 or 23 or 29 or 33 mod 40 のとき χ (n)＝−1,

その他のとき χ (n)＝0 となる。

よって、s＝2 の Lk4(2)は次となる。

$Lk4(2)=1+1/3^2-1/7^2+1/9^2-1/11^2+1/13^2-/17^2-1/19^2-1/21^2-1/23^2+1/27^2-1/29^2+1/31^2-1/33^2+1/37^2+1/39^2+1/41^2+1/43^2-1/47^2+1/49^2-1/51^2+1/53^2-1/57^2-1/59^2-1/61^2-1/63^2+1/67^2-1/69^2+1/71^2-1/73^2+1/77^2+1/79^2+\cdots$

この Lk4(s)は16年前に上記 Lk1(s)と一緒に考察したものでもある。⇒自身のサイト(重回積分 π/20 代入)

念のため、両ゼータとも、合同方程式と平方剰余の相互法則から上記の級数の形が正しいことを今回再度確認した。OK。

なお、“Lk1()”や“Lk4( )”という記法は、私が独自に以前から用いているものであり、一般的なものではないので注意いただきたい。

今回も過去の結果を一部利用する。Lk1(1)8分割は(その21)で得た L(1)10分割の結果を流用する。Lk4(2)8分割は、実質的には(その83)の Z(2)10分割で(10個のうちの8個として)得ているが、厳密にするため今回計算し直した。

では、m＝10 の場合を検証しよう。

＜m=10 の場合の予想の検証＞

予想の中の②の x に 19/20 を代入して、次を得る。

$(20^4/38^2)(A-a/19)=(\pi^2\cdot 20^2/(4^2\cdot 19^2))/\cos^2(19\pi/40)-(\pi\cdot 20^3/(8\cdot 19^3))\tan(19\pi/40)$ ------③

ここで、左辺の A, a は次のものである。

$A=1+1/39^2+1/41^2+1/79^2+1/81^2+1/119^2+\cdots$

$a=1-1/39+1/41-1/79+1/81-1/119+\cdots$

②の x に 17/20 を代入して、次を得る。

$(20^4/34^2)(B-b/17)=(\pi^2\cdot 20^2/(4^2\cdot 17^2))/\cos^2(17\pi/40)-(\pi\cdot 20^3/(8\cdot 17^3))\tan(17\pi/40)$ ------④

ここで、左辺の B, b は次のものである。

$B=1/3^2+1/37^2+1/43^2+1/77^2+1/83^2+1/117^2+\cdot\cdot$

$b=1/3-1/37+1/43-1/77+1/83-1/117+\cdot\cdot$

②の x に 13/20 を代入して、次を得る。

$(20^4/26^2)(C-c/13)=(\pi^2\cdot 20^2/(4^2\cdot 13^2))/\cos^2(13\pi/40)-(\pi\cdot 20^3/(8\cdot 13^3))\tan(13\pi/40)$ ------⑤

ここで、左辺の C, c は次のものである。

$C=1/7^2+1/33^2+1/47^2+1/73^2+1/87^2+1/113^2+\cdot\cdot$

$c=1/7-1/33+1/47-1/73+1/87-1/113+\cdot\cdot$

②の x に 11/20 を代入して、次を得る。

$(20^4/22^2)(D-d/11)=(\pi^2\cdot 20^2/(4^2\cdot 11^2))/\cos^2(11\pi/40)-(\pi\cdot 20^3/(8\cdot 11^3))\tan(11\pi/40)$ ------⑥

ここで、左辺の D, d は次のものである。

$D=1/9^2+1/31^2+1/49^2+1/71^2+1/89^2+1/111^2+\cdot\cdot$

$d=1/9-1/31+1/49-1/71+1/89-1/111+\cdot\cdot$

②の x に 9/20 を代入して、次を得る。

$(20^4/18^2)(E-e/9)=(\pi^2\cdot 20^2/(4^2\cdot 9^2))/\cos^2(9\pi/40)-(\pi\cdot 20^3/(8\cdot 9^3))\tan(9\pi/40)$ ------⑦

ここで、左辺の E, e は次のものである。

$E=1/11^2+1/29^2+1/51^2+1/69^2+1/91^2+1/109^2+\cdot\cdot$

$e=1/11-1/29+1/51-1/69+1/91-1/109+\cdot\cdot$

②の x に 7/20 を代入して、次を得る。

$(20^4/14^2)(F-f/7)=(\pi^2\cdot 20^2/(4^2\cdot 7^2))/\cos^2(7\pi/40)-(\pi\cdot 20^3/(8\cdot 7^3))\tan(7\pi/40)$ ------⑧

ここで、左辺の F, f は次のものである。

$F=1/13^2+1/27^2+1/53^2+1/67^2+1/93^2+1/107^2+\cdot\cdot$

$f=1/13-1/27+1/53-1/67+1/93-1/107+\cdot\cdot$

②の x に 3/20 を代入して、次を得る。

$(20^4/6^2)(G-g/3)=(\pi^2\cdot 20^2/(4^2\cdot 3^2))/\cos^2(3\pi/40)-(\pi\cdot 20^3/(8\cdot 3^3))\tan(3\pi/40)$ ------⑨

ここで、左辺の G, g は次のものである。

$G=1/17^2+1/23^2+1/57^2+1/63^2+1/97^2+1/103^2+\cdot\cdot$

$g=1/17-1/23+1/57-1/63+1/97-1/103+\cdot\cdot$

②の x に 1/20 を代入して、次を得る。

$(20^4/2^2)(H-h)=(\pi^2\cdot 20^2/(4^2\cdot 1^2))/\cos^2(\pi/40)-(\pi\cdot 20^3/(8\cdot 1^3))\tan(\pi/40)$ ------⑩

ここで、左辺の H, h は次のものである。

$H=1/19^2+1/21^2+1/59^2+1/61^2+1/99^2+1/101^2+\cdot\cdot$

$h=1/19-1/21+1/59-1/61+1/99-1/101+\cdot\cdot$

さて、③～⑩左辺の a, b, c, d, e, f, g, h の値は、予想の①の x に 19/20, 17/20, 13/20, 11/20, 9/20, 7/20, 3/20, 1/20 を代入した結果として既に(その21)のＬ(1) １０分割で得ている(10分身のうちの8分身が対応)。その結果を流用すると、a～h の値は次となる(右辺)。

$a=1-1/39+1/41-1/79+1/81-1/119+\cdot\cdot\cdot=(\pi/40)\tan(19\pi/40)$

$b=1/3-1/37+1/43-1/77+1/83-1/117+\cdot\cdot=(\pi/40)\tan(17\pi/40)$

$c=1/7-1/33+1/47-1/73+1/87-1/113+\cdot\cdot=(\pi/40)\tan(13\pi/40)$

$d=1/9-1/31+1/49-1/71+1/89-1/111+\cdot\cdot=(\pi/40)\tan(11\pi/40)$

$e=1/11-1/29+1/51-1/69+1/91-1/109+\cdot\cdot=(\pi/40)\tan(9\pi/40)$

$f=1/13-1/27+1/53-1/67+1/93-1/107+\cdot\cdot=(\pi/40)\tan(7\pi/40)$

$g=1/17-1/23+1/57-1/63+1/97-1/103+\cdot\cdot=(\pi/40)\tan(3\pi/40)$

$h=1/19-1/21+1/59-1/61+1/99-1/101+\cdot\cdot=(\pi/40)\tan(\pi/40)$

これら a, b, c, d, e, f, g, h 値(右辺値)を③～⑩に代入すると、A, B, C, D, E, F, G, H の値として次を得る(右辺)。

$A=1+1/39^2+1/41^2+1/79^2+1/81^2+1/119^2+\cdot\cdot\cdot=(\pi/40)^2/\cos^2(19\pi/40)$

$B=1/3^2+1/37^2+1/43^2+1/77^2+1/83^2+1/117^2+\cdot\cdot=(\pi/40)^2/\cos^2(17\pi/40)$

$C=1/7^2+1/33^2+1/47^2+1/73^2+1/87^2+1/113^2+\cdot\cdot=(\pi/40)^2/\cos^2(13\pi/40)$

$D=1/9^2+1/31^2+1/49^2+1/71^2+1/89^2+1/111^2+\cdot\cdot=(\pi/40)^2/\cos^2(11\pi/40)$

$E=1/11^2+1/29^2+1/51^2+1/69^2+1/91^2+1/109^2+\cdot\cdot=(\pi/40)^2/\cos^2(9\pi/40)$

$F=1/13^2+1/27^2+1/53^2+1/67^2+1/93^2+1/107^2+\cdot\cdot=(\pi/40)^2/\cos^2(7\pi/40)$

$G=1/17^2+1/23^2+1/57^2+1/63^2+1/97^2+1/103^2+\cdot\cdot=(\pi/40)^2/\cos^2(3\pi/40)$

$H=1/19^2+1/21^2+1/59^2+1/61^2+1/99^2+1/101^2+\cdot\cdot=(\pi/40)^2/\cos^2(\pi/40)$

これで準備は整った。

” a −b +c +d +e +f −g +h”と“A +B −C +D −E +F −G −H“を計算すると、次のように Lk1(1)と Lk4(2)ができてくる！

$a-b+c+d+e+f-g+h$

$=1-1/3+1/7+1/9+1/11+1/13-/17+1/19-1/21+1/23-1/27-1/29-1/31-1/33+1/37-1/39$
$+1/41-1/43+1/47+1/49+1/51+1/53-/57+1/59-1/61+1/63-1/67-1/69-1/71-1/73+1/77-1/79+\cdot\cdot$

$=\mathrm{Lk1}(1)$

$=(\pi/40)\{\tan(19\pi/40)-\tan(17\pi/40)+\tan(13\pi/40)+\tan(11\pi/40)+\tan(9\pi/40)+\tan(7\pi/40)$
$-\tan(3\pi/40)+\tan(\pi/40)\}$

$\boldsymbol{=\pi/\sqrt{10}}$

A +B −C +D −E +F −G −H

$=1 +1/3^2 -1/7^2 +1/9^2 -1/11^2 +1/13^2 -/17^2 -1/19^2 -1/21^2 -1/23^2 +1/27^2 -1/29^2 +1/31^2 -1/33^2 +1/37^2 +1/39^2 +1/41^2 +1/43^2 -1/47^2 +1/49^2 -1/51^2 +1/53^2 -1/57^2 -1/59^2 -1/61^2 -1/63^2 +1/67^2 -1/69^2 +1/71^2 -1/73^2 +1/77^2 +1/79^2 +\cdots$

$=Lk4(2)$

$=(\pi/40)^2\{1/\cos^2(19\pi/40) +1/\cos^2(17\pi/40) -1/\cos^2(13\pi/40) +1/\cos^2(11\pi/40) -1/\cos^2(9\pi/40) +1/\cos^2(7\pi/40) -1/\cos^2(3\pi/40) -1/\cos^2(\pi/40)\}$

$\mathbf{=7\pi^2/(20\sqrt{10})}$

結局、a, −b, c, d , e, f, −g, h が Lk1(1)の８分身であり、A, B, −C, D, −E, F, −G, −H が Lk4(2)の８分身となっている。

Lk1(1)の値 $\pi/\sqrt{10}$ は虚２次体の類数公式より得られる。上記三角関数の計算を遂行すると、$\pi/\sqrt{10}$ に一致することを Excel で確認した。

Lk4(2)の値 $7\pi^2/(20\sqrt{10})$を上記三角関数の計算から出すのはなかなか大変である。そこで、別ルートをとり、（有理数）× $\pi^2/\sqrt{10}$ の予想と Excel での数値計算を実行することで $7\pi^2/(20\sqrt{10})$を得た。

Lk1(1)、Lk4(2)の級数の値も Excel マクロで数値計算し、それぞれ $\pi/\sqrt{10}$ と $7\pi^2/(20\sqrt{10})$に収束することを確認した。OK。

このように予想での①、②の x に 19/20, 17/20, 13/20, 11/20, 9/20, 7/20, 3/20, 1/20 を代入することで、Lk1(1) と Lk4(2)の８分割が同時に得られることが分かった。両ゼータの特殊値が求まったことにも注目したい。

よって、m＝10 での予想の正しさが確認できた。

（検証終わり）

このようにして、m＝10 での成立が確認できた。

Lk1(1)と Lk4(2)の二式を再掲しよう。どちらの値にも$\sqrt{10}$ が出ていて、きれいである。

Lk1(1)

$=1 -1/3 +1/7 +1/9 +1/11 +1/13 -/17 +1/19 -1/21 +1/23 -1/27 -1/29 -1/31 -1/33 +1/37 -1/39 +1/41 -1/43 +1/47 +1/49 +1/51 +1/53 -/57 +1/59 -1/61 +1/63 -1/67 -1/69 -1/71 -1/73 +1/77 -1/79 +\cdots$

$\mathbf{=\pi/\sqrt{10}}$

Lk4(2)

$=1 +1/3^2 -1/7^2 +1/9^2 -1/11^2 +1/13^2 -/17^2 -1/19^2 -1/21^2 -1/23^2 +1/27^2 -1/29^2 +1/31^2 -1/33^2 +1/37^2 +1/39^2 +1/41^2 +1/43^2 -1/47^2 +1/49^2 -1/51^2 +1/53^2 -1/57^2 -1/59^2 -1/61^2 -1/63^2 +1/67^2 -1/69^2 +1/71^2 -1/73^2 +1/77^2 +1/79^2 +\cdots$

$\mathbf{=7\pi^2/(20\sqrt{10})}$

最後に、整理の意味から少しメモしておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●これまで見てきたように、Q(√‾−m)ゼータと Q(√‾m)ゼータの値には√m が出現する。これはどこまでもそうなっているのだろう。

m＝2 では、どちらのゼータ値にも√‾2 が出た。⇒(その191)
m＝3 では、どちらのゼータ値にも√‾3 が出た。⇒(その192)
m＝5 では、どちらのゼータ値にも√‾5 が出た。⇒(その193)
m＝6 では、どちらのゼータ値にも√‾6 が出た。⇒(その194)
m＝7 では、どちらのゼータ値にも√‾7 が出た。⇒(その195)
m＝10 では、どちらのゼータ値にも√‾10 が出た。⇒今回

これは、ξ(s)を包含する巨大ゼータL(χ,s)の地下にとてつもない秩序が存在することを暗示している。

● ついいましがた、気付いたことがある。

これまでの私の研究では、リーマン・ゼータξ(s)は仮想的？２次体 Q(√‾1)のゼータ関数である。

ただし√1 は 1 なので、ξ(s)は有理数体のゼータということはなってしまうのだが。ちなみに、L(1)＝π/4 で有名な L(s)は虚２次体 Q(√‾−1)のゼータである。

冒頭の予想をこの二つのゼータに適用してみよう。

ξ(s)は Q(√‾1)ゼータであり、L(s)は Q(√‾−1)ゼータであるから、m＝1 のケースにあたる。

冒頭の予想にしたがって、式の x に 1/2 を代入すると、たちまち、

L(1)＝π/4

ξ(2)＝π^2/6

が得られる。

すると、一つ上で述べたことが、これら両ゼータでも当てはまっているのである！

つまり、

m＝1 では、どちらのゼータ値にも√‾1 が出た。⇒いま、ここで。

と言える！

面白いことである。ゼータは、どこまでもきれいである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.4.29　杉岡幹生

(参考文献)

・「解決！フェルマーの最終定理」(加藤和也著、日本評論社)