

< $Q(\sqrt{m})$ と $Q(\sqrt{-m})$ のゼータを同時に作る分割が存在する(予想) 、 $Q(\sqrt{3})$ と $Q(\sqrt{-3})$ >

以下の予想の確認の続きを行う。前回は実2次体 $Q(\sqrt{2})$ と虚2次体 $Q(\sqrt{-2})$ で予想が成立していることを見た。

今回は、実2次体 $Q(\sqrt{3})$ と虚2次体 $Q(\sqrt{-3})$ で確認したい。すなわち、両2次体それぞれのゼータを同時に作る
ことのできる分割が存在することを見る。

=====

< 予想 >

部分分数展開式①と、それを1回微分した式②において、実2次体 $Q(\sqrt{m})$ 、虚2次体 $Q(\sqrt{-m})$ のそれ
ぞれのゼータを同時に作ることのできる分割が存在する。

$$1/(1^2-x^2) + 1/(3^2-x^2) + 1/(5^2-x^2) + \dots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2) \text{ ---①}$$

$$1/(1^2-x^2)^2 + 1/(3^2-x^2)^2 + 1/(5^2-x^2)^2 + \dots = (\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2) - \{\pi/(8x^3)\}\tan(\pi x/2) \text{ ---②}$$

=====

今回の $m=3$ のケースを具体的に述べると、次のようになる。

②と①の x に $5/6$ と $1/6$ を代入すると、実2次体 $Q(\sqrt{3})$ ゼータ LB(2)の2分割ができ、同時に虚2次
体 $Q(\sqrt{-3})$ ゼータ La(1)の2分割ができる。

ここで、LB(2)は、実2次体 $Q(\sqrt{3})$ ゼータ LB(s)の $s=2$ のものである。LB(s)は、ディリクレのL関数 $L(\chi, s)$ の一種
で次の形をしたものである(導手 $N=12$)。詳細は、[\(その69\)](#)、[\(その189\)](#)を参照されたい。

$$LB(s) = 1 - 1/5^s - 1/7^s + 1/11^s + 1/13^s - 1/17^s - 1/19^s + 1/23^s + \dots$$

La(1)は、虚2次体 $Q(\sqrt{-3})$ ゼータ LA(s)と本質的に等しい La(s)の $s=1$ のものである。LA(s)は、ディリクレのL関
数 $L(\chi, s)$ の一種で次の形をしたものである(導手 $N=3$)。詳細は、[\(その29\)](#)を参照のこと。

$$LA(s) = 1 - 1/2^s + 1/4^s - 1/5^s + 1/7^s - 1/8^s + 1/10^s - 1/11^s + \dots$$

また La(s) は、次となる。

$$La(s) = 1 - 1/5^s + 1/7^s - 1/11^s + 1/13^s - 1/17^s + 1/19^s - 1/23^s + \dots$$

この La(s) は、LA(s) と本質的に等しい。⇒[\(その29\)](#)

今回も、本シリーズで行ってきた過去の分割の結果を一部利用する。今回の $m=3$ のケースでは、La(1)は、過
去の[\(その29\)](#)の La(1) 2分割を利用する。LB(2)の2分割は新たに計算した。

なお、“LB()”や“LA()”または“La(s)”の記号は、私が独自に以前から用いているものであり、一般的な記号では
ないので注意いただきたい。

では、 $m=3$ のケースを検証しよう。

<m=3 の場合の予想の検証>

予想中の②の x に $5/6$ を代入して、次を得る。

$$(6^4/10^2)(A - a/5) = (\pi^2 \cdot 6^2 / (4^2 \cdot 5^2)) / \cos^2(5\pi/12) - (\pi \cdot 6^3 / (8 \cdot 5^3)) \tan(5\pi/12) \quad \text{-----③}$$

ここで、左辺の A, a は次のものである。

$$A = 1 + 1/11^2 + 1/13^2 + 1/23^2 + 1/25^2 + 1/35^2 + \dots$$

$$a = 1 - 1/11 + 1/13 - 1/23 + 1/25 - 1/35 + \dots$$

②の x に $1/6$ を代入して、次を得る。

$$(6^4/2^2)(B - b) = (\pi^2 \cdot 6^2 / 4^2) / \cos^2(\pi/12) - (\pi \cdot 6^3 / 8) \tan(\pi/12) \quad \text{-----④}$$

ここで、左辺の B, b は次のものである。

$$B = 1/5^2 + 1/7^2 + 1/17^2 + 1/19^2 + 1/29^2 + 1/31^2 + \dots$$

$$b = 1/5 - 1/7 + 1/17 - 1/19 + 1/29 - 1/31 + \dots$$

さて、 a と b の値は、①の x に $5/6, 1/6$ を代入した結果として既に(その29)の $La(1)$ 2分割で得ている。その結果の $A1, A2$ を流用すると($A1$ が a に、 $A2$ が b に対応)、 a, b の値は次となる(右辺)。

$$a = 1 - 1/11 + 1/13 - 1/23 + 1/25 - 1/35 + \dots = (\pi/12) \tan(5\pi/12)$$

$$b = 1/5 - 1/7 + 1/17 - 1/19 + 1/29 - 1/31 + \dots = (\pi/12) \tan(\pi/12)$$

この a, b の値を③、④に代入すると、 A, B の値は次となる(右辺)。

$$A = 1 + 1/11^2 + 1/13^2 + 1/23^2 + 1/25^2 + 1/35^2 + \dots = (\pi/12)^2 / \cos^2(5\pi/12)$$

$$B = 1/5^2 + 1/7^2 + 1/17^2 + 1/19^2 + 1/29^2 + 1/31^2 + \dots = (\pi/12)^2 / \cos^2(\pi/12)$$

ここで、 $A - B$ と $a - b$ を計算すると、次のように $LB(2)$ と $La(1)$ ができてくる！

$$\begin{aligned} A - B &= 1 - 1/5^2 - 1/7^2 + 1/11^2 + 1/13^2 - 1/17^2 - 1/19^2 + 1/23^2 + 1/25^2 - 1/29^2 - 1/31^2 + 1/35^2 + \dots \\ &= LB(2) = (\pi/12)^2 \{1/\cos^2(5\pi/12) - 1/\cos^2(\pi/12)\} = \pi^2 / (6\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - b &= 1 - 1/5 + 1/7 - 1/11 + 1/13 - 1/17 + 1/19 - 1/23 + \dots \\ &= La(1) = (\pi/12) \{\tan(5\pi/12) - \tan(\pi/12)\} = \pi / (2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

結局、 $A, -B$ が $LB(2)$ の2分身であり、また $a, -b$ が $La(1)$ の2分身となっている。

このように①、②の x に $5/6, 1/6$ を代入することで、 $LB(2)$ と $La(1)$ の2分割が同時に得られることが分かった。

よって、 $m=3$ のケースでの予想の正しさが確認できた。

(検証終わり)

以上。

このようにして、 $m=3$ で予想が成立していることが確認できた。

$Q(\sqrt{3})$ と $Q(\sqrt{-3})$ の各ゼータの分割が同時に得られ、それらの分身から $Q(\sqrt{3})$ と $Q(\sqrt{-3})$ の各ゼータが構成される (特殊値が求まる！) という美しい構造を味わっていただきたい。

今回は、 $m=3$ のケースを見たが、次回以降で、 $m=5, 6, 7$ などを確かめていきたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

●これまで $m=2$ と $m=3$ で予想の成立を確かめたが、実際には、 $m=5, 6, 7$ のケースまで、その正しさを確認している。それらを眺めると、ある規則が見えてくる。

それは、 $x=0/(2m)$ を代入したときに、同時に $Q(\sqrt{m})$ 、 $Q(\sqrt{-m})$ の各ゼータの分割が出現するという規則である。

$m=2$ と $m=3$ ではそうなっているが、(未公表の) $m=5, 6, 7$ のケースでもそれは成り立っている。というか、その規則性があるから、予想の正しさを簡単に確認することができる、とも言える。予想の文の「存在する」を確かめるだけでは、一体どんな数を代入すればよいか見当がつかない。上の強力な規則のおかげで、代入すべき数が簡単に分かる。よって、この予想は、次のようにより精密な形に改良できる。

<予想(改良版)>

部分分数展開式①と、それを1回微分した式②の x に $k/(2m)$ を代入すると、実2次体 $Q(\sqrt{m})$ 、虚2次体 $Q(\sqrt{-m})$ のそれぞれのゼータを同時に作ることができる分割を得る。

$$1/(1^2-x^2) + 1/(3^2-x^2) + 1/(5^2-x^2) + \dots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2) \quad \text{---①}$$

$$1/(1^2-x^2)^2 + 1/(3^2-x^2)^2 + 1/(5^2-x^2)^2 + \dots = (\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2) - \{\pi/(8x^3)\}\tan(\pi x/2) \quad \text{---②}$$

ここで、 k は、 $1 \leq k < 2m$ を満たす複数の自然数である。

この改良版は、どんな数を代入すればよいか分かり、より使いやすい、精密なものになっていると言える。

● 本シリーズでよく出てくる実2次体ゼータとか虚2次体ゼータとは何だろうか。簡単に説明しておく。ゼータ関数には、さまざまな種類がある。方程式のゼータ関数、保型形式のゼータ関数、セルバーグ型ゼータ関数、合同ゼータ関数などである。

2次体ゼータは、方程式のゼータ関数 $F(s)$ であり、次のように定義される。

$$F(s) = \prod_p (1 - \alpha(p) \cdot p^{-s})^{-1}$$

いま虚2次体 $Q(\sqrt{-3})$ ゼータを例にとると、方程式 $x^2 \equiv -3 \pmod{p}$ に解があれば、 $\alpha(p)$ は1となり、解がなければ-1となる。それを2,3以外のすべての素数で調べていき、その結果の $\alpha(p)$ 値(1か-1)を上記のF(s)に入れていって構成されるのが $Q(\sqrt{-3})$ ゼータである。しかし、素数は無限にあり、各素数pでの解の有無など簡単にわかりそうにない。

ところが、平方剰余の相互法則という超強力な法則があって、それを使えば、各素数での解の有無が簡単にわかってしまう!のである。別な表現をすれば、方程式のゼータ関数という難解なゼータが、ディリクレのL関数 $L(\chi, s)$ というもっと簡単な保型形式のゼータに置き換えられてしまうのである。生まれ故郷が違う二つのゼータ関数が一致するという物語になる。

方程式のゼータ関数(2次体ゼータ) = $L(\chi, s)$ という保型形式のゼータ関数

●数学者の加藤和也さんは、「解決!フェルマーの最終定理」(加藤和也著、日本評論社)で、様々な工夫をして、方程式ゼータ関数が保型形式のゼータ関数に一致する様子をわかりやすく説明している。

加藤さんは、平方剰余の相互法則を大変ふしぎな法則!として紹介しているが、私もふしぎな感じを抱く。

●平方剰余の相互法則は、オイラー(1707-1783)が発見し、ルジャンドル(1752-1833)が整備し、最終的な証明はガウス(1777-1855)が与えたようである。この法則の先取権などでは、ルジャンドルとガウスの間でいろいろとごたごたがあったようである。

「ルジャンドルによる平方剰余相互法則の証明とその変遷(数学史の研究)」

https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/42999/1/1317_02.pdf

=====

2021.3.14 杉岡幹生

(参考文献)

・「解決!フェルマーの最終定理」(加藤和也著、日本評論社)

・「ルジャンドルによる平方剰余相互法則の証明とその変遷(数学史の研究)」

https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/42999/1/1317_02.pdf