＜ 最小分割問題、虚２次体Ｑ(√‾-11)対応ゼータ LQ(1) ＞

前回の実２次体Ｑ(√‾3)ゼータの LB(1)に続いて、ここでは虚２次体Ｑ(√‾-11)に対応するゼータ LQ(1)の最小分割問題を考えたい。

結論を先に述べると、L(1) １１分割の１０分身を使って LQ(1)が得られた。LQ(1)を得るための L(1)の最小分割数は 11 である。

（その１８８）では LQ(1)の５分割を行ったが、今回行ったことは、それとは違った視点、すなわち「L(1)の分割から LQ(1)が得られるはずだ。そして LQ(1)を得るための L(1)分割の最小分割数はいくらか？」という予想を解くために行ったものである。

それは

すべての虚２次体ゼータは、L(s)の分割から得られるはず

すべての実次体ゼータは、ζ(s)の分割から得られるはず

という私の基本予想（根源的な予想なのでそう名付けたい）の確認の一部ともなっている。

まず復習から。虚2次体Q(√‾-11)に対応するゼータ LQ(s)とは、ディリクレのL関数 L(χ,s)

$$L(\chi,s)=\chi(1)/1^s+\chi(2)/2^s+\chi(3)/3^s+\chi(4)/4^s+\chi(5)/5^s+\chi(6)/6^s+\chi(7)/7^s+\cdots$$

の一種であり、次のものである。

$$LQ(s)=1-1/2^s+1/3^s+1/4^s+1/5^s-1/6^s-1/7^s-1/8^s\ \ +1/9^s-1/10^s$$

$$+1/12^s-1/13^s+1/14^s+1/15^s+1/16^s-1/17^s-1/18^s-1/19^s\ \ +1/20^s-1/21^s+\cdots$$

この LQ(s)は虚 2 次体 Q(√‾-11)に対応するゼータ関数で、導手 N＝11 を持つ。

ディリクレ指標 χ(n)は、以下となる。

n≡1 or 3 or 4 or 5 or 9 mod 11 のとき χ(n)＝1

n≡2 or 6 or 7 or 8 or 10 mod 11 のとき χ(n)＝-1

その他のとき χ(n)＝0

s＝1 での LQ(1)は次の通り。

$$LQ(1)=1-1/2+1/3+1/4+1/5-1/6-1/7-1/8\ \ +1/9-1/10$$

$$+1/12-1/13+1/14+1/15+1/16-1/17-1/18-1/19\ \ +1/20-1/21+\cdots$$

$$=\pi/\sqrt{11}$$

最後の π/√11 は虚2次体の類数公式から出る。しかし、そのような高級な公式を使わずとも、（その１８８）で見た分割の手法を使っても出る。（注記：三角関数での成立は確認できた。まだ手計算での成立は確認できていない。）

さらに、LQ(1)を作るための L(1)最小分割数を調べるには、LQ(1)の以下の変形が必要である。

LQ(1)＝1 −1/2 +1/3 +1/4 +1/5 −1/6 −1/7 −1/8 +1/9 −1/10

+1/12 −1/13 +1/14 +1/15 +1/16 −1/17 −1/18 −1/19 +1/20 −1/21

+1/23 −1/24 +1/25 +1/26 +1/27 −1/28 −1/29 −1/30 +1/31 −1/32

+1/34 −1/35 +1/36 +1/37 +1/38 −1/39 −1/40 −1/41 +1/42 −1/43

+ ・・・・・・・・

＝{1 +1/3 +1/5 −1/7 +1/9 −1/13 +1/15 −1/17 −1/19 −1/21

+1/23 +1/25 +1/27 −1/29 +1/31 −1/35 +1/37 −1/39 −1/41 −1/43

+ ・・}

−(1/2){1 −1/2 +1/3 +1/4 +1/5 −1/6 −1/7 −1/8 +1/9 −1/10

+1/12 −1/13 +1/14 +1/15 +1/16 −1/17 −1/18 −1/19 +1/20 −1/21 +・・・}

＝{1 +1/3 +1/5 −1/7 +1/9 −1/13 +1/15 −1/17 −1/19 −1/21

+1/23 +1/25 +1/27 −1/29 +1/31 −1/35 +1/37 −1/39 −1/41 −1/43

+ ・・}

−(1/2)LQ(1)

よって、右辺の−(1/2)LQ(1)を左辺に移行して、

(3/2)LQ(1)＝1 +1/3 +1/5 −1/7 +1/9 −1/13 +1/15 −1/17 −1/19 −1/21

+1/23 +1/25 +1/27 −1/29 +1/31 −1/35 +1/37 −1/39 −1/41 −1/43

+ ・・

ここで、右辺の級数を Lq(1)とすると、次のようになる。

$(3/2)LQ(1)=Lq(1)$

ここで、Lq(1)は、次のものである。

$Lq(1)=1 +1/3 +1/5 -1/7 +1/9 -1/13 +1/15 -1/17 -1/19 -1/21$

$+1/23 +1/25 +1/27 -1/29 +1/31 -1/35 +1/37 -1/39 -1/41 -1/43$

$+ \cdots\cdots$

つまり、Lq(1)は、LQ(1)と本質的に同じものである。(Lp(s)は LQ(s)と同じと言ってもよい)

$LQ(1)=\pi/\sqrt{11}$ だから、　$Lq(1)=(3/2)LQ(1)=3\pi/(2\sqrt{11})$

以下では、この Lq(1)の出現を見ることになる。

なお、”LQ()”や“Lq()”という記号は私が独自に用いているもので、一般的なものでないので注意いただきたい。

それでは、L(1)１１分割を利用して、今回の結果を示す。
L(1)１１分割は、２年前の(その107)の結果を利用した(導出過程はそちらを参照)。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■L(1)１１分割

A1 ＝ $1 - 1/43 +1/45 -1/87 +1/89 -1/131 + \cdots = (\pi/44)\tan(21\pi/44)$
A2 ＝ $1/3 -1/41 +1/47 -1/85 +1/91 -1/129 + \cdots = (\pi/44)\tan(19\pi/44)$
A3 ＝ $1/5 -1/39 +1/49 -1/83 +1/93 -1/127 + \cdots = (\pi/44)\tan(17\pi/44)$
A4 ＝ $1/7 -1/37 +1/51 -1/81 +1/95 -1/125 + \cdots = (\pi/44)\tan(15\pi/44)$
A5 ＝ $1/9 -1/35 +1/53 -1/79 +1/97 -1/123 + \cdots = (\pi/44)\tan(13\pi/44)$
A6 ＝$1/11 -1/33 +1/55 -1/77 +1/99 -1/121 + \cdots = (\pi/44)\tan(11\pi/44)$
A7 ＝$1/13 -1/31 +1/57 -1/75 +1/101 -1/119 + \cdots = (\pi/44)\tan(9\pi/44)$
A8 ＝$1/15 -1/29 +1/59 -1/73 +1/103 -1/117 + \cdots = (\pi/44)\tan(7\pi/44)$
A9 ＝$1/17 -1/27 +1/61 -1/71 +1/105 -1/115 + \cdots = (\pi/44)\tan(5\pi/44)$
A10＝$1/19 -1/25 +1/63 -1/69 +1/107 -1/113 + \cdots = (\pi/44)\tan(3\pi/44)$
A11＝$1/21 -1/23 +1/65 -1/67 +1/109 -1/111 + \cdots = (\pi/44)\tan(\pi/44)$

A1, −A2, A3, −A4, A5, −A6, A7, −A8, A9, −A10, A11 が L(1)の１１分身である。

A1 −A2 +A3 −A4 +A5 −A6 +A7 −A8 +A9 −A10 +A11＝L(1)＝$\pi/4$ となる。

そして、

A1 +A2 +A3 −A4 +A5 −A7 +A8 −A9 −A10 −A11＝Lq(1)＝$3\pi/(2\sqrt{11})$となる！

＝＝

このように、L(1)１１分割の A6 を除く１０分身から、Lq(1)が作られることが分かった。

なお、除いた A6 は、L(1)そのものとなっていることにも注意したい（すぐに分かる）。

Lq(1)の符号の並びを見ると、分母の数が 22、44、66、・・・というブロック単位で変わっていっている。これを L(1)１１分割より小さい分割で構成することは不可能である。

よって、LQ(1)を作るための L(1)の最小分割数は 11 となる。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●LQ(1)から Lq(1)への変形は、むずかしく感じるかもしれないが、慣れれば簡単である。

これまでも2次体ゼータを考察したとき、何度も同類の変形がでてきた。

●じつは、Lq(s)は方程式 $x^2=-11$ のゼータ関数である。LQ(s)は保形形式のゼータ関数である。これが一致するという物語でもある。

二つの異世界の？ゼータ関数をつなぐのは、平方剰余の相互法則である。

平方剰余の相互法則には、オイラーが発見し、ルジャンドルらが整備し、最終的な証明はガウスが与えたという歴史があるようである。平方剰余の相互法則については、「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）の加藤和也さんの説明が秀逸である。

●素数が無限にあることは、ユークリッドが原論にてすでに証明している。ソートイという英国の高名な数学者はその証明を「天才的な証明です！」とテレビで語っていたが、私もそう思う。

さらに、オイラー(1707−1783)は、$\zeta(s)$を用いて素数が無限にあることを証明している。

●しかし、4 で割ると 1 余る素数は無限にあるのか？　5 で割ると 2 余る素数は無限にあるのか？

10 で割ると 7 余る素数はどうか？など、だれも分からなかった。

ディリクレ（1805−1859）は、自らが発明したディリクレのL関数 L(χ,s)というゼータ関数を用いて、それらのタイプの素数が無限にあることを証明した。

ディリクレの算術級数定理

N, a を自然数、a＜N とし、a と N は共通の素因数をもたないとする。この時、N で割った余りが a となる素数は無限に存在する。

古代ギリシャ以来、だれも成しえなかったことをディリクレは示したのである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021. 2. 20　杉岡幹生

（参考文献）

・「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）

・天王星　その２（2004/7/28）http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page077.htm