＜ 虚２次体Ｑ(√−5)ゼータ LC(1)の２分身 ＞

虚２次体Ｑ(√−5)ゼータ LC(1)の２分身が直接得られる母等式が見つかったので、報告したい。

「ゼータの香り・・」シリーズにおいて、2018 年から 2019 にかけて、２次体に対応するゼータの分身を考察した。そこでは、虚２次体ではＱ(√−2)、Ｑ(√−5)、Ｑ(√−6)、Ｑ(√−7)などを見た。実２次体ではＱ(√2)、Ｑ(√5)、Ｑ(√3)を見た。

虚２次体Ｑ(√−5)に対応するゼータ LC(s)の LC(1)では、(その７３) で「LC(s)の分割は4分割スタートとなるため、4×n で"4n 分割可能"となります。」と述べたが、それは

$$1/(1^2-x^2) \quad +1/(3^2-x^2) \quad +1/(5^2-x^2) \quad +\cdots \quad =(\pi/(4x))\tan(\pi x/2) \quad ----①$$

という母等式を使うから、そうなったのであって、別の次の母等式を使えば、その L(1)3分割から LC(1)の2分身がいきなり出ることが分かった。

$$1/(2^2-x^2) \quad -1/(4^2-x^2) \quad +1/(6^2-x^2) \quad -1/(8^2-x^2)+\cdots \quad =(1/(2x^2))\{(\pi x/2)/\sin(\pi x/2) \quad -1\} \quad ----②$$

ところで、LC(s)とはディリクレのL関数 L(χ,s)

$$L(\chi,s)=\chi(1)/1^s+\chi(2)/2^s+\chi(3)/3^s+\chi(4)/4^s+\chi(5)/5^s+\chi(6)/6^s+\chi(7)/7^s+\cdots$$

の一種であり、次のものである。

$$LC(s)=1+1/3^s+1/7^s+1/9^s-/11^s-1/13^s-1/17^s \quad -1/19^s+\cdots$$

LC(s)は虚 2 次体 Q(√−5)に対応するゼータ関数で、導手 N=20 を持つ。

ディリクレ指標 χ(n)は、n≡1 or 3 or 7 or 9 mod 20 のとき χ(n)＝1、 n≡11 or 13 or 17 or 19 mod 20 のとき χ(n)＝−1, その他のとき χ(n)＝0 となる。

s＝1 の LC(1)は次の通り。

$$LC(1)=1+1/3+1/7+1/9-/11-1/13-1/17 \quad -1/19+1/21+1/23+1/27+1/29-/31-1/33-1/37 \quad -1/39+\cdots$$

$$=\pi/\sqrt{5}$$

値の π/√5 は、虚2次体の類数公式から出る。が、そのような高級な公式を使わずとも、以下のように分割の手法を使えば、LC(1)級数の値はπ/√5 と簡単に出る。

なお、"LC()"という記号は私が独自に用いているものであり、一般的なものではないので注意いただきたい。

それでは、今回の結果を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■L(1)3分割

B1＝ 1 +1/9 −1/11 −1/19 +1/21 +1/29 −1/31 −1/39 +1/41 +1/49 − ・・ ＝(π/10)/sin(π/10)

B2＝1/3 +1/7 −1/13 −1/17 +1/23 +1/27 −1/33 −1/37 +1/43 +1/47 − ・・＝(π/10)/sin(3π/10)

B3＝1/5 −1/15 +1/25 −1/35 −1/39 +1/45 − ・・ ＝(π/20)/sin(5π/10)

B1 +B2＝LC(1) となる。B3 は L(1)そのもの。B3 を除く B1, B2 の右辺の sin()の値は、次の通り。

1/sin(π/10) ＝1 +√5

1/sin(3π/10)＝−1 +√5

なお、B1 −B2 +B3＝L(1)である。

上記の結果の導出過程を簡単に述べる。次のタンジェントの部分分数展開式を使う。

$1/(2^2-x^2) \quad -1/(4^2-x^2) \quad +1/(6^2-x^2) \quad -1/(8^2-x^2) +\cdots = (1/(2x^2))\{(\pi x/2)/\sin(\pi x/2) \quad -1\}$ −−−−②

この x に次の値を代入することで、分割された級数（分身の級数）とその値が求まる。

x に 1/5 を代入すると、B1 が得られる。

x に 3/5 を代入すると、B2 が得られる。

x に 5/5 を代入すると、B3 が得られる。 ⇒ L(1)そのもの。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このように、LC(1)の２分身が求まった。

B1 と B2 だけ取り上げると、

B1＝ 1 +1/9 −1/11 −1/19 +1/21 +1/29 −1/31 −1/39 +1/41 +1/49 − ・・ ＝(π/10)(1 +√5)

B2＝1/3 +1/7 −1/13 −1/17 +1/23 +1/27 −1/33 −1/37 +1/43 +1/47 − ・・＝(π/10)(−1 +√5)

であり、したがって、B1+B2＝LC(1)＝π/√5 となる。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●じつは、L(1)の5分身（の4分身）からも、LC(1)の2分身を構成できる。

（その102）の後半で「L(1)でも同類の新種の2分身(2-1)と(2-2)を発見した」と記しているように、そこでは今回の B1 と B2 と同じものを見出している。しかし"L(1)の2分身"として見ており、"LC(1)の2分身"との見方をしていない。

2019 年の段階では、虚2次体Q(√−5)ゼータ LC(1)に意識がいかなかった、と気づく。

●ゼータの分割は、ゼータが分身に次々に分裂し、その値が次々に求まるという感動的な現象である。

実用的な面でいえば、ディリクレのL関数 L(χ,s)の特殊値の値が簡単に求まるという点が、最も重要である。

類数公式という高級な道具を使わずとも、L(χ,s)値が求まる。すなわち、L(1)、ζ(2)を含む虚2次体ゼータ、実2次体ゼータの値（特殊値）が簡単に出るのである。

類数公式は、L(χ,s)の s＝1 の場合の公式で、それ以外の整数点での値はどうなのかよくわからないが、ゼータ分割では s が 2 以上の整数点での値も出る（明示的な特殊値の場合）。

●これまでの多くの結果から、次のことが言えると思う。

L(1)の分割（分身）から、すべての虚2次体ゼータの値が得られるはずである。

ζ(2)の分割（分身）から、すべての実2次体ゼータの値が得られるはずである。

● $1/(2^2-x^2) \quad -1/(4^2-x^2) \quad +1/(6^2-x^2) \quad -1/(8^2-x^2)+\cdots \quad =(1/(2x^2))\{(\pi x/2)/\sin(\pi x/2) \quad -1\}$ ----②

今回使ったこの母等式は、「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」の次の部分分数展開式を変数変換して得た。

$\csc(x)=1/x-2x\{1/(x^2-\pi^2) \quad -1/(x^2-4\pi^2) \quad +1/(x^2-9\pi^2) \quad -\cdots\}$

すこし複雑な考察を経て、この式から LC(1)の2分身が出ると分かった。csc(x)＝1/sin(x)である。

②から、Q(√−5)以外の虚2次体に対応するゼータの値も出るのだろうが、しかし、この②からは、虚2次体しか出てこないような気がする。

一方、これまでずっと使ってきた次の母等式からは、虚2次体ゼータ値も実2次体ゼータ値も両方求まってきた。

$1/(1^2-x^2) \quad +1/(3^2-x^2) \quad +1/(5^2-x^2) \quad +\cdots \quad =(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

こちらは、ある意味、万能の母等式である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2020.12.20　杉岡幹生

（参考文献）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）」