＜ ζ(4)の５分割 ＞

（その１７７）で、リーマンゼータζ(s)のζ(4)の３分割を示した。その続きで、今回はζ(4)の５分割を示す。

ζ(4)に関しては、２年以上前の（その１７）で２分割、４分割、８分割を示し、上で３分割を示していた。そして今回５分割を埋める形となる。

これまでと同様に、ζ(4)と本質的に同じZ(4)の分身として求めていく。Z(s)は次のもので、本質的にζ(s)に等しいものである。なぜなら以下のように変形でき、それはζ(s)そのものだからである。

$$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+1/9^s+1/11^s+\cdots \quad \text{----①}$$

$$\begin{aligned}Z(s)&=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+1/9^s+1/11^s+\cdots\\&=1+1/2^s+1/3^s+1/4^s+1/5^s+1/6^s+1/7^s\cdots-(1/2^s+1/4^s+1/6^s+\cdots)\\&=\zeta(s)-1/2^s\zeta(s)\\&=(1-1/2^s)\zeta(s) \quad \text{----②}\end{aligned}$$

これより、ζ(4)の分身の値はZ(4)のそれを見ればよいとわかる。ζ(4)はζ(4)＝$\pi^4/90$であり、②より Z(4)＝$\pi^4/96$となる。なお“Z(s)”は、筆者が使っている記法で一般的なものではない。

では５分割の結果を示す。

■Z(4) ５分割

$$A1=1+1/19^4+1/21^4+1/39^4+1/41^4+1/59^4+\cdots=(\pi/20)^4\{1+2\sin^2(9\pi/20)\}/\{3\cos^4(9\pi/20)\}$$

$$A2=1/3^4+1/17^4+1/23^4+1/37^4+1/43^4+1/57^4+\cdots=(\pi/20)^4\{1+2\sin^2(7\pi/20)\}/\{3\cos^4(7\pi/20)\}$$

$$A3=1/5^4+1/15^4+1/25^4+1/35^4+1/45^4+1/55^4+\cdots=(\pi/20)^4\{1+2\sin^2(5\pi/20)\}/\{3\cos^4(5\pi/20)\}$$

$$A4=1/7^4+1/13^4+1/27^4+1/33^4+1/47^4+1/53^4+\cdots=(\pi/20)^4\{1+2\sin^2(3\pi/20)\}/\{3\cos^4(3\pi/20)\}$$

$$A5=1/9^4+1/11^4+1/29^4+1/31^4+1/49^4+1/51^4+\cdots=(\pi/20)^4\{1+2\sin^2(\pi/20)\}/\{3\cos^4(\pi/20)\}$$

A1 +A2 +A3 +A4 +A5＝Z(4)＝$\pi^4/96$となっている。A1,A2,A3,A4,A5が５分身である。(A3は本質的にZ(4)そのもの)

念のため、Excelマクロで数値検証も行ったが、左辺の級数は右辺値に収束した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上の分割級数の導出過程を簡単に述べる。タンジェントの部分分数展開式は次の通りである。

$1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdot\cdot=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを３回微分して得られる次式を使う。

$1/(1^2-x^2)^4+1/(3^2-x^2)^4+1/(5^2-x^2)^4+\cdot\cdot$

$=(\pi/(4x))^4\{1+2\sin^2(\pi x/2)\}/\{3\cos^4(\pi x/2)\}+\mathrm{Others}(x)$ ---③

ここで右辺の Others(x)は目的のゼータ値には関係しない項なので”Others(x)”とした。

上記③の x に特定の値を代入することで分割級数（分身）が次々に求まっていく。以下の通り。

③の x に値 9/10 を代入すると、Z(4)の A1 が得られる。
③の x に値 7/10 を代入すると、Z(4)の A2 が得られる。
③の x に値 5/10 を代入すると、Z(4)の A3 が得られる。
③の x に値 3/10 を代入すると、Z(4)の A4 が得られる。
③の x に値 1/10 を代入すると、Z(4)の A5 が得られる。
以上。

（注記）③の左辺級数から L(1)とζ(2)と L(3)の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺の L(1)とζ(2)と L(3)の分割級数に対応した値が Others(x)から出るが、それも無視する。興味がないものは Others(x)に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単に Z(4)の分割級数（分身）を求めることができる。Z(6)、Z(8)・・でも同様にできる。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このように Z(4)の5分身(すなわちζ(2)の5分身)が求まった。

これまでの繰り返しになるが、奇数分割の真ん中の値は、真の分身ではなく、元の Z(4)そのものになるので、注意いただきたい。

最後に、「ゼータの分割」というテーマのこれまでの流れを整理しておきたい。

****
●今回は、多角数と微分方程式の所からすこし離れて、本道のゼータの分割に戻った形となった。

本シリーズの中心的テーマである「ゼータの分割」は、2年半以上やっているが、あまりに深い鉱脈である。手つかずの原石が、あちこちに転がっている感じである。いろんなことが分かってきたが、この2年半の流れをまとめると、次のようになる。

ゼータの香りの漂う公式 ⇒部分分数展開式 ⇒ゼータの分割(ゼータが分身たち分かれた！) ⇒フラクタル構造 ⇒L(χ,s)は分身たち作られる ⇒分身を生み出す固有方程式 ⇒L(1)はパスカル三角形、ζ(2)はチェビシェフ多項式と関係 ⇒固有値、エルミート行列 ⇒そのエルミート行列は実-双対角対称行列(実[双]行列) ⇒実[双]行列の集合は無限

群（可換群）を成す（その142） ⇒実[双]行列の集合は体を成す（その145）⇒分身を解にもつ方程式の多項式関数を解にもつ微分方程式 ⇒超幾何微分方程式

　ざっとこのような感じであるが、本当は絵で書く方がもっと適切なものになると思う。

「この辺に鉱石がうまっていないか？」と手掘りで原石を掘りだしては、（宝石にまで）磨かずにその辺に（予想や問題の形で）放置して、先へ先へと進んできたという感じである。

●「ゼータの分割」というテーマの本質を一言で述べれば、L(1)やζ(2)などのゼータの明示的特殊値のふしぎや構造をさぐっているといえる。その意味で、岩澤理論と似たテーマといえるかもしれない。ゼータの香りの漂う公式は10年ほど前にフーリエ級数から様々な種類のものを導いた。
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page209.htm
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page212.htm

　これらの美しい公式群は、このように初等的に導出できる。三角関数の際立った対称性が、ゼータの豊かさを生み出している。

****

2020.12.5　杉岡幹生