自然数列と多角数列を作用素行列にもつ微分方程式

---- 負の多角数の方向を見る ----

微分方程式の「作用素行列で数列が変わったらどうなるか？」というテーマの続きである。
このテーマは、ゼータ分割という大河の支流の奥の奥で見つけた洞窟の趣がある。深そうであり、しばらく調べたいと思っている。ときどき本流に戻りつつ。

さて、前回の（その１８２）の最後で、次のように「マイナス方向にもその根は伸びているか？」と問うた。

●$(-x/2)$、$(-2x/2)$、$(-3x/2)$、・・とマイナス方向にもその根は伸びているか？

調べた結果、根は伸びていた。多角数とラゲール(類似)微分方程式の作用素の間には、次のようなきれいな関係があることが分かってきた。

・
・
- 自然数列-“－２角数列”[連続]微分方程式　$(-4x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
- 自然数列-“－１角数列”[連続]微分方程式　$(-3x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
- 自然数列-０角数列[連続]微分方程式　$(-2x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
- 自然数列-一角数列[連続]微分方程式　$(-1x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
- 自然数列-自然数列(二角数列)[連続]微分方程式　$(0x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
- 自然数列-三角数列[連続]微分方程式　$(1x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
- 自然数列-四角数列[連続]微分方程式　$(2x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$　🡐ラゲール微分方程式
- 自然数列-五角数列[連続]微分方程式　$(3x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
- 自然数列-六角数列[連続]微分方程式　$(4x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
- 自然数列-七角数列[連続]微分方程式　$(5x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$

・
・

このような関係が見えてきた。
負の方向は一角数列～－２角数列を見ただけだが、それ以外も同様になっていることは確実と思う。多角数は、通常は三角数、四角数、五角数・・と幾何学的に３以上のものとなるが、“$(n/2-1)m^2-(n/2-2)m$”の「m 番目の n 角数の公式」に対し、n を２以下の整数にも広げて考察している。
なお、二角数列は自然数列と同じであり、“自然数列”の方で書いたので注意されたい（公式に n=2 代入)。また、負の多角数は“－一角数列”などと漢数字で書くと紛らわしいので西洋数字で表現した。

以下に、七角数列から－２角数列の分を全てまとめたものを示す。
各微分方程式での n=4 の場合を代表選手として(解は n=1～5 まで)書いた。そのきれいな構造を味わっていただきたい。七角数列⇒-２角数列の順に書き、多角数列を青字で、対角成分の自然数列を赤字で表した。基底の取り方は、七角数列の場合のみ記した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■＜ 自然数列−七角数列[連続]微分方程式 ＞

$$(5x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$$ （n＝1, 2, 3,・・）

上記微分方程式の n＝4 の解 y＝x^4 −34x^3 +306x^2 −714x +357/2 に対し、基底を x^4 , x^3 , x^2 , x , 1 として、

x^4 を$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$に、$x^3$ を$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$に、$x^2$ を$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$に、x を$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$に、1 を$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$に対応させる。

[n＝4 の場合] 作用素（演算子）“$(5x/2)\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + 4$” に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\34&1&0&0&0\\0&18&2&0&0\\0&0&7&3&0\\0&0&0&1&4\end{bmatrix}$$

n＝1～5 の場合の解を示す。

n＝1 の場合　y＝x −1

n＝2 の場合　y＝x^2 −7x +7/2

n＝3 の場合　y＝x^3 −18x^2 +63x −21

n＝4 の場合　y＝x^4 −34x^3 +306x^2 −714x +357/2

n＝5 の場合　y＝x^5 −55x^4 +935x^3 −5610x^2 +(19635/2)x −3927/2

■＜ 自然数列−六角数列[連続]微分方程式 ＞

$$(4x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$$ （n＝1, 2, 3,・・）

[n＝4 の場合] 作用素 “$(4x/2)\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + 4$” に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\28&1&0&0&0\\0&15&2&0&0\\0&0&6&3&0\\0&0&0&1&4\end{bmatrix}$$

n＝1～5 の場合の解を示す。

n=1 の場合　y=x −1

n＝2 の場合　y＝x^2 −6x +3

n＝3 の場合　y＝x^3 −15x^2 +45x −15

n＝4 の場合　y＝x^4 −28x^3 +210x^2 −420x +105

n＝5 の場合　y＝x^5 −45x^4 +630x^3 −3150x^2 +4725x −945

■＜ 自然数列−五角数列[連続]微分方程式 ＞

$$(3x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$$ （n＝1, 2, 3,・・）

[n=4 の場合]　作用素 “$(3x/2)\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+4$” に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

n=1～5 の場合の解を示す。

n=1 の場合　$y=x-1$

n=2 の場合　$y=x^2-5x+5/2$

n=3 の場合　$y=x^3-12x^2+30x-10$

n=4 の場合　$y=x^4-22x^3+132x^2-220x+55$

n=5 の場合　$y=x^5-35x^4+385x^3-1540x^2+1925x-385$

■< 自然数列–四角数列[連続]微分方程式（ラゲール微分方程式）>

$$(2x/2)y''+(1-x)y'+ny=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdot\ \cdot)$$

[n=4 の場合]　作用素 “$(2x/2)\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+4$” に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

n=1～5 の場合の解を示す。

n=1 の場合　$y=x-1$

n=2 の場合　$y=x^2-4x+2$

n=3 の場合　$y=x^3-9x^2+18x-6$

n=4 の場合　$y=x^4-16x^3+72x^2-96x+24$

n=5 の場合　$y=x^5-25x^4+200x^3-600x^2+600x-120$

■< 自然数列–三角数列[連続]微分方程式>

$$(1x/2)y''+(1-x)y'+ny=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdot\ \cdot)$$

[n=4 の場合]　作用素 “$(1x/2)\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+4$” に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

n=1～5 の場合の解を示す。

n=1 の場合　$y=x-1$

n=2 の場合　$y=x^2-3x+3/2$

n=3 の場合　$y=x^3-6x^2+9x-3$

n=4 の場合　$y=x^4-10x^3+30x^2-30x+15/2$

n=5 の場合　$y=x^5-15x^4+75x^3-150x^2+(225/2)x-45/2$

■＜ 自然数列-自然数列[連続]微分方程式＞

$(0x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$　　（n=1，2，3，・・）

[n=4 の場合]　作用素 “$(0x/2)\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + 4$” に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

n=1～5 の場合の解を示す。

n=1 の場合　$y=x-1$

n=2 の場合　$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$

n=3 の場合　$y=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$

n=4 の場合　$y=x^4-4x^3+6x^2-4x+1=(x-1)^4$

n=5 の場合　$y=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1=(x-1)^5$

■＜ 自然数列-一角数列[連続]微分方程式＞

$(-1x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$　　（n=1，2，3，・・）

[n=4 の場合]　作用素 “$(-1x/2)\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + 4$” に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

n=1～5 の場合の解を示す。

n=1 の場合　$y=x-1$

n=2 の場合　$y=x^2-x+1/2$

n=3 の場合　$y=x^3$

n=4 の場合　$y=x^4+2x^3$

n=5 の場合　$y=x^5+5x^4+5x^3$

■＜ 自然数列-0 角数列[連続]微分方程式＞

$(-2x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$　　（n=1，2，3，・・）

[n=4 の場合]　作用素“$(-2x/2)\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+4$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

n＝1～5 の場合の解を示す。

n＝1 の場合　　$y=x-1$

n＝2 の場合　　$y=x^2$

n＝3 の場合　　$y=x^3+3x^2$

n＝4 の場合　　$y=x^4+8x^3+12x^2$

n＝5 の場合　　$y=x^5+15x^4+60x^3+60x^2$

■＜ 自然数列-“－１角数列”[連続]微分方程式＞

$$(-3x/2)y''+(1-x)y'+ny=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

[n=4 の場合]　作用素“$(-3x/2)\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+4$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

n＝1～5 の場合の解を示す。

n＝1 の場合　　$y=x-1$

n＝2 の場合　　$y=x^2+x-1/2$

n＝3 の場合　　$y=x^3+6x^2+3x-1$

n＝4 の場合　　$y=x^4+14x^3+42x^2+14x-7/2$

n＝5 の場合　　$y=x^5+25x^4+175x^3+350x^2+(175/2)x-35/2$

■＜ 自然数列-“－２角数列”[連続]微分方程式＞

$$(-4x/2)y''+(1-x)y'+ny=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

[n=4 の場合]　作用素“$(-4x/2)\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+4$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

n＝1～5 の場合の解を示す。

n＝1 の場合　$y=x-1$

n＝2 の場合　$y=x^2+2x-1$

n＝3 の場合　$y=x^3+9x^2+9x-3$

n＝4 の場合　$y=x^4+20x^3+90x^2+60x-15$

n＝5 の場合　$y=x^5+35x^4+350x^3+1050x^2+525x-105$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようになった。その美しい秩序を味わっていただきたい。青字のところはきれいに多角数が並んでいる。例えば、五角数の場合は、1,　5,　12,　22,　35,　51, 70,・・と並んでいく。

一つだけ微分方程式を行列(ベクトル)で表現したものを見ておきたい。例えば、自然数列-五角数[連続]微分方程式のn=3 では、解は $y=x^3-12x^2+30x-10$ であるから、$(3x/2)y'' + (1-x)y' + 3y = 0$は、その解を用いて行列(ベクトル)で表現すると、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ 30 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

左辺を計算すると、右辺になることを確認していただきたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****

●今回見た微分方程式は、すべて合流型超幾何微分方程式 $xy'' + (c-x)y' - ay = 0$であることがわかった。
今回のものと少し違うように見えるかもしれないが、簡単な変数変換で上記に変換できる。考えられたし。

●解に直交性があるのは、ラゲール微分方程式（自然数列-四角数列[連続]微分方程式）のみのような気がする。
スツルム-リウヴィルとの関連。

●今回見た微分方程式の解の多項式から成る方程式の解は、すべて実数だろうか。

****

2020.11.22　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック（Muray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)」