自然数列と三角数列を作用素行列にもつ微分方程式

ラゲール微分方程式の周辺で、作用素行列で数列が変わったらどうなるか？を調べている。

前回（その１８１）は二つの自然数列が並んだ形を考察した。そこではラゲール微分方程式に似た一次の微分方程式が得られた。それを“自然数列-自然数列[連続]微分方程式”と名付けたい（前回の名前から少し変更）。

さて、今回は、自然数列と三角数列が並んだ作用素行列を持つ微分方程式を見出したので、報告したい。解も見つけたので同時に示す。名前は、自然数列と三角数列が連続して並んでいるので、“自然数列-三角数列[連続]微分方程式”と名付けることにする。

ここで、三角数とは、点を使って順に大きな三角形を作っていくのに必要となる点の数であり、多角数の一種である。m 番目の三角数は、“$m^2/2+m/2$“の公式で得られる。三角数は次のようになる。

1　3　6　10　15　21　28　36　45　55　66　78　91　・・・

本当は、五角数、六角数、七角数の微分方程式まで出たのであるが、多くなるので、三角数の場合だけ先に示す。n 角数と微分方程式の間に美しい構造があることが見えてきたのだが、最後のつぶやきに少し書いた。

では、以下に示す。比較の意味でラゲール微分方程式も作用素行列だけ示した。前回同様、n=6 の場合だけ（代表選手として）示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■＜ 自然数列-三角数列[連続]微分方程式 ＞

$$(x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

上記微分方程式の n=6 の解 $y=x^6-21x^5+(315/2)x^4-525x^3+(1575/2)x^2-(945/2)x+(315/4)$ に対し、基底を $x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1$ として、

x^6 を $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ に、x^5 を $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ に、x^4 を $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ に、x^3 を $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ に、x^2 を $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ に、x を $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ に、1 を $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ に対応させる。

[n=6 の場合]　作用素“$(x/2)y'' + (1-x)y' + 6y$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\21&1&0&0&0&0&0\\0&15&2&0&0&0&0\\0&0&10&3&0&0&0\\0&0&0&6&4&0&0\\0&0&0&0&3&5&0\\0&0&0&0&0&1&6\end{bmatrix}$$

n＝1～6 の場合の解を示す。

n＝1 の場合　$y=x-1$

n＝2 の場合　$y=x^2-3x+3/2$

n＝3 の場合　$y=x^3-6x^2+9x-3$

n＝4 の場合　$y=x^4-10x^3+30x^2-30x+15/2$

n＝5 の場合　$y=x^5-15x^4+75x^3-150x^2+(225/2)x-45/2$

n＝6 の場合　$y=x^6-21x^5+(315/2)x^4-525x^3+(1575/2)x^2-(945/2)x+(315/4)$

・

・

■＜ ラゲール微分方程式 ＞

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdot\cdot)$$

[n＝6 の場合]　作用素“$x\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+6$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

自然数列－三角数列[連続]微分方程式は、このようになった。行列内に、自然数列と三角数列が並んでいることを確認いただきたい。

微分方程式を行列(ベクトル)で示すと、例えば n＝3 では、解は $y=x^3-6x^2+9x-3$ であるから、$(x/2)y''+(1-x)y'+3y=0$は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

左辺を計算すると、きちんと右辺になることを確認いただきたい。

二つの微分方程式を比較してみよう。

・自然数列－三角数列[連続]微分方程式　$(x/2)y''+(1-x)y'+ny=0$

・ラゲール微分方程式　$xy''+(1-x)y'+ny=0$

非常に似ているではないか！

<u>作用素行列で見ると、三角数と四角数というふうにえらく違っているのに、微分方程式で見ると、その違いはわずかである</u>。

なおn=1〜6の解について、微分方程式が線形なので、解の右辺は分数ではなく整数に形を整えることは容易であるが、本質的でないのでそのままにしておいた。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****

●じつは五角数〜七角数の微分方程式も見出すことができた。四角数(ラゲール)と今回の三角数、前回の自然数も含めてまとめると、次のようになる。

・自然数列-自然数列[連続]微分方程式　$(0/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
・自然数列-三角数列[連続]微分方程式　$(x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
・自然数列-四角数列[連続]微分方程式　$(2x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
・自然数列-五角数列[連続]微分方程式　$(3x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
・自然数列-六角数列[連続]微分方程式　$(4x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$
・自然数列-七角数列[連続]微分方程式　$(5x/2)y'' + (1-x)y' + ny = 0$

この眺めは何なのだろう？ とんでもない規則性が出現している。

作用素行列の数列の他の多角数列への置換の背後に豊かな構造があると分かった。なお、自然数列-四角数列[連続]微分方程式は、ラゲール微分方程式のことである。

●エルミート、チェビシェフ、ルジャンドルやL(1)分割などの微分方程式にも同類の構造がひそんでいるに違いない。

●$(-x/2)$、$(-2x/2)$、$(-3x/2)$、・・とマイナス方向にもその根は伸びているか？

****

2020.11.7　杉岡幹生

＜参考文献＞

●「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック（Muray R. Spiegel著、氏家勝巳訳、オーム社)」

●「マスペディア 1000」（リチャード・エルウィス著、宮本寿代訳、ディスカヴァー・トゥエンティワン）