自然数列二つを作用素(行列)にもつ微分方程式

前回の（その１８０）の最後で次のように述べた。

****

●見ている微分方程式は、ほぼ全部がスツルム-リウヴィル型である。L(1)だけはどうなのか？

スツルム-リウヴィル型は三角数や四角数や自然数が基調になっているようだ。

では、五角数や六角数などが並ぶ行列（作用素）を持つ微分方程式はどのようなものになるのか？

****

上に関し、今回、作用素の行列表現で自然数列二つの並びをもつ微分方程式を求めたので、紹介したい。五角数や六角数のそれはむずかしいので、まずは簡単なものから求めた。

さて、今回の求めた、自然数列二つの並びを作用素（行列表現）にもつ微分方程式を“自然数列２個連続型微分方程式“と名付ける。そう名づけた理由はあとで説明する。

ラゲール微分方程式と並列して示す。まずラゲールを示し、次に自然数列２個連続型微分方程式を示す。前回と同様、n=6 のケースだけを（代表選手として）示した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■＜ラゲール微分方程式＞

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdot\ \cdot)$$

[n=6 のケース]　作用素“$x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + 6$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

■＜自然数列２個連続型微分方程式＞

$$(1-x)y' + ny = 0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdot\ \cdot)$$

[n=6 のケース]　作用素“$(1-x)\frac{d}{dx} + 6$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

この自然数列２個連続型微分方程式の解も示しておく。

n＝1 の場合　$y=x-1$
n＝2 の場合　$y=x^2-2x+1$
n＝3 の場合　$y=x^3-3x^2+3x-1$
n＝4 の場合　$y=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$
n＝5 の場合　$y=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$
n＝6 の場合　$y=x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$
・
・
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようになった。
ラゲール微分方程式は、自然数列と四角数列（平方数）の二つの並びをもっているが、その四角数列の方も自然数列にしたらどうなるか？つまり、二つの自然数列をもつ微分方程式はどんなものだろうか？と思って求めた結果が上記である。このように一次の微分方程式になった。なにやらラゲールとも似ている。

なぜ自然数列２個連続型微分方程式と名付けたかであるが、自然数列の並びのすぐ下にもう一つの自然数列が“連続して“並んでいるので、こう名付けた。
（その１８０）を見ると、数列の並びが一つ空けて並んでいるものもあり（例えば、エルミート微分方程式など）、その並び方と区別したいので“連続”を付けた。それはラゲールと同類の並び方とも言える。

上記の解を見ると、その係数はパスカルの三角形になっている。そしてそれは $y=(x-1)^n$ を展開したものでもある。

n=6 での解 $y=x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$ での $(1-x)y'+6y=0$ を行列（ベクトル）表現しておくと、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 15 \\ -20 \\ 15 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

左辺を計算すると、きちんと右辺になることを確認していただきたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****

●とにかく面白いのは今回の微分方程式の解の係数がパスカルの三角形になっていることである。

L(1)分割微分方程式との類似性を思わずにはいられない。その解にもパスカルの三角形が現れるからである。ただし両者の解では、+、-の符号の並びかたが違っている。

（その１７８）でのＬ(1)分割微分方程式での一般解の符号と自然数列２個連続型微分方程式の解とを比べていただきたい。

その違いはちょっとである。ちょっとなのに、そのわずかな違いがゼータの深いところに通じている。

この微妙さ！デリケートさ！！

このかすかな違いが豊かなゼータ域を織り上げていく。そこには、えも言われぬ味わいがある。

●この微分方程式の行列表現の領域は、ゼータ分割の研究の途上でたまたま見つけた穴（洞窟）といった趣がある。深そうな感じである。

****

2020.11.2　杉岡幹生

＜参考文献＞

●「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック（Muray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)」