L(1)分割/エルミート/ラゲール/ξ(2)分割/チェビシェフ/ルジャンドル微分方程式の作用素の行列表現

（その１７８）の最後で次のように述べた（若干修正した）。

****
以下、L(1)分割微分方程式も含めて、それらの作用素の行列の特徴を一言でまとめる。

・L(1)分割微分方程式　⇒二つの三角数列。
・エルミート微分方程式　⇒自然数列(1, 2, 3, 4,・・)と三角数列。
・ラゲール微分方程式　⇒自然数列(1, 2, 3, 4,・・)と四角数列。
・ξ(2)分割微分方程式　⇒一つ飛ばしの三角数列と四角数の起点。和の規則。
・チェビシェフ微分方程式　⇒三角数列と四角数の起点。和の規則。
・ルジャンドル微分方程式　⇒三角数列と三角数の起点。和の規則。
****

これに関して、前回（その１７９）でL(1)分割、ラゲール、ξ(2)分割のそれぞれの微分方程式の行列表現をn=2～6で示し、それらを比較した。

今回は上の六つ全部の微分方程式の作用素（演算子）の行列表現を比較したい。

前回のようにn=2～6で見るのは大変なので、代表選手としてn=6のケースだけを示す。それぞれの性質を見るにはそれで十分である。

ここで復習だが、L(1)分割微分方程式とは、ゼータL(s)でのL(1)のn分割されたn分身たちを生み出すn次代数方程式のn次多項式関数を解に持つ微分方程式のことであり、本シリーズで長く調べてきたものである。ξ(2)分割微分方程式も同類である。

では冒頭の順番で示していく。

==================================

■＜L(1)分割微分方程式＞

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \qquad (n=\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\cdots)$$

[n=6のケース(６分割)]　作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2} - 10x\frac{d}{dx} + 30$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

■＜エルミート微分方程式＞

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$　（n＝0，1，2，3，・・）

[n＝6 のケース]　作用素“$\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 12$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

■＜ラゲール微分方程式＞

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$　（n＝0，1，2，3，・・）

[n＝6 のケース]　作用素“$x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + 6$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

■＜ζ(2)分割微分方程式＞

$$2x(x-1)y'' - \{(4n-3)x - (4n-2)\}y' + n(2n-1)y = 0$$　（n＝・・−3,−2,−1，0，1，2，3・・）

[n＝6 のケース（６分割）]　作用素“$2x(x-1)\frac{d^2}{dx^2} - (21x-22)\frac{d}{dx} + 66$”に対応する行列は次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 72 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 66 \end{bmatrix}$$

■＜チェビシェフ微分方程式＞

$(1-x^2)\mathrm{y}'' - \mathrm{x}y' + \mathrm{n}^2\mathrm{y} = 0$　　（n＝0，1，2，3，・・）

[n＝6 のケース]　作用素“$(1-\mathrm{x}^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \mathrm{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + 36$”に対応する行列は次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

■＜ルジャンドル微分方程式＞

$(1-x^2)\mathrm{y}'' - 2\mathrm{x}y' + \mathrm{n}(\mathrm{n}+1)\mathrm{y} = 0$　　（n＝0，1，2，3，・・）

[n＝6 のケース]　作用素“$(1-\mathrm{x}^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2\mathrm{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + 42$”に対応する行列は次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

以上、このようになった。

この美しい秩序を味わっていただきたい。冒頭のまとめを再掲しよう。

****
・L(1)分割微分方程式　⇒二つの三角数列。
・エルミート微分方程式　⇒自然数列(1, 2, 3, 4,・・)と三角数列。
・ラゲール微分方程式　⇒自然数列(1, 2, 3, 4,・・)と四角数列。
・ξ(2)分割微分方程式　⇒一つ飛ばしの三角数列と四角数の起点。和の規則。
・チェビシェフ微分方程式　⇒三角数列と四角数の起点。和の規則。
・ルジャンドル微分方程式　⇒三角数列と三角数の起点。和の規則。
****

L(1)とエルミートとラゲールは、眺めるだけで上記の規則がわかるだろう。それはあまりに美しい。

三角数列や四角数列やまた四角数の起点、和の規則などの意味については、(その１７８)、(その１７９) を参照いただきたい。前回「列和の規則」としていたが「和の規則」に表現を変えた。各列内の和から成る数列の規則だけでなく、斜め方向(or 横同士)の二数の和でもきれいな数列を作っていくからである。発見されよ。

他のものにはなくL(1)分割のみが持つ特徴がある。それは行列の上部２行が全部ゼロということである。

読者も観察して自分なりの規則を見つけていただきたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****
●見ている微分方程式は、ほぼ全部がスツルム-リウヴィル型である。L(1)だけはどうなのか？
スツルム-リウヴィル型は三角数や四角数や自然数が基調になっているようだ。
では、五角数や六角数などが並ぶ行列（作用素）を持つ微分方程式はどのようなものになるのか？

●一つ上はゼータとは離れて、きわめて興味ある問題である。奥に大きな洞窟があるはずだ。すなわち、行列表現から微分方程式を分類していく。スツルム-リウヴィル型でなければ何型？

●私の好みはL(1)分割、エルミート、ラゲールの微分方程式である。その行列は本当に単純できれいである。

●数学者の広中平祐氏は「米国の数学界は、とかく複雑難解を尊ぶ風のある日本のそれとは逆に、単純明快であることを重視する。」(p.136)と「学問の発見」で述べている。
「・・しかし、数学の上では米国のこの単純明快を尊ぶ気風の中で学べたことを、私はよかったと思っている。単純明快に自分の考えを相手に伝えるには、自分の考えに責任をもたなければならない。」(p.137)とも。

この部分はよく覚えていて、よく思いだす。
****

2020.10.24　杉岡幹生

＜参考文献＞

●「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック（Muray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)」

●「学問の発見」(広中平祐著、佼成出版社)