L(1)分割/ξ(2)分割/ラゲールの微分方程式の行列表現

　前回（その１７８）でL(1)分割微分方程式の行列表現を示し、最後で次のように述べた（若干修正した）。

****
　以下、L(1)分割微分方程式も含めて、それらの作用素の行列の特徴を一言でまとめる。

・L(1)分割微分方程式　⇒二つの三角数列。
・エルミート微分方程式　⇒自然数列(1，2，3，4，・・)と三角数列。
・ラゲール微分方程式　⇒自然数列(1，2，3，4，・・)と四角数列。
・ξ(2)分割微分方程式　⇒一つ飛ばしの三角数列と四角数の起点。列和の規則。
・チェビシェフ微分方程式　⇒三角数列と四角数の起点。列和の規則。
・ルジャンドル微分方程式　⇒三角数列と三角数の起点。列和の規則。
****

上記に関し、今回はL(1)分割微分方程式、ラゲール微分方程式、ξ(2)分割微分方程式の三つを並べてみることにする。三者を比較することで、その形の面白さを味わってみたい。

　最初に復習としてL(1)分割微分方程式の n＝5 での導出方法の概要を示し、次に、L(1)、ξ(2)、ラゲールの n＝2～6 のケースを示す。L(1)は前回のものを再掲。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝
L(1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \quad\text{-----}[1]$$

(n=・・-3, -2, -1，0，1，2，3・・)

●L(1)分割微分方程式[1]の一般解（n が任意の整数値での解）

・
・
n＝2 の場合　$y=c_1(x^2-2x-1)+c_2(x^2+2x-1)$
n＝3 の場合　$y=c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)$
n＝4 の場合　$y=c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)$
n＝5 の場合　$y=c_1(x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1)+c_2(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)$
n＝6 の場合　$y=c_1(x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1)+c_2(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)$
n＝7 の場合　$y=c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1)$
$+c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)$
・
・
　ここで、c_1 と c_2 は任意の定数である。

さて、n＝5 の場合、[1]は次のようになる。

$(x^2+1)y'' - 8xy' + 20y = 0$　　-----[1] -2

一般解の n＝5 の c_1 側基本解 $f(x)=x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1$ に対し、基底を x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1 とし、

x^5 を$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$に、$x^4$ を$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$に、$x^3$ を$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$に、$x^2$ を$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$に、x を$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$に、1 を$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$に対応させる。

すると、上記の微分方程式[1]-2 は行列とベクトルで表現でき、次のようになる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\10&0&1&0&0&0\\0&6&0&3&0&0\\0&0&3&0&6&0\\0&0&0&1&0&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-5\\-10\\10\\5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad \text{-----[1] -3}$$

ここで、左辺の行列が作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2}-8x\frac{d}{dx}+20$”に対応している。

また左辺のベクトルは $f(x)=x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1$ に対応している。

この行列で対称的に斜めに二列で走る 1　3　6　10 の数列は、多角数の一種の三角数となっている。

三角数は　1,　3,　6,　10,　15,　21,　28,　36,　45,　55,　・・・という数で、これはだんだんと大きな三角形の形にボールを積み上げていくときのボールの個数である。n(n+1)/2 が三角数を生み出す公式である。

ちなみに n＝5 の一般解の c_2 側の基本解 $g(x)=(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)$ のベクトルをとっても、上記と同じ作用素行列に対し、[1]-3 と同類の形が成り立つ。

以下、同様にして、それぞれの微分方程式の n＝2～6 での作用素の行列を示す。

■＜L(1)分割微分方程式の n＝2～6 のケース＞

L(1)分割微分方程式の作用素(演算子)“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2}-2(n-1)x\frac{d}{dx}+n(n-1)$”の行列は、以下のように二つの三角数列から構成される。

[n＝2 のケース(２分割)]　作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}+2$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

[n＝3 のケース(３分割)]　作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2}-4x\frac{d}{dx}+6$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\3&0&1&0\\0&1&0&3\end{bmatrix}$$

[n＝4 のケース（４分割）]　作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2}-6x\frac{d}{dx}+12$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\6&0&1&0&0\\0&3&0&3&0\\0&0&1&0&6\end{bmatrix}$$

[n＝5 のケース（５分割）]　作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2}-8x\frac{d}{dx}+20$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\10&0&1&0&0&0\\0&6&0&3&0&0\\0&0&3&0&6&0\\0&0&0&1&0&10\end{bmatrix}$$

[n＝6 のケース（６分割）]　作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2}-10x\frac{d}{dx}+30$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\15&0&1&0&0&0&0\\0&10&0&3&0&0&0\\0&0&6&0&6&0&0\\0&0&0&3&0&10&0\\0&0&0&0&1&0&15\end{bmatrix}$$

■＜ラゲール微分方程式の n＝2～6 のケース＞

ラゲール微分方程式

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdot\ \cdot)$$

作用素（演算子）“$x\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+n$”の行列は、以下のように自然数列（1，2，3，4，・・）と四角数列から構成される。

[n＝2 のケース（２分割）]　作用素“$x\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+2$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\4&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}$$

[n＝3 のケース（３分割）] 作用素“$x\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+3$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

[n＝4 のケース（４分割）]　作用素“$x\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+4$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

[n＝5 のケース（５分割）]　作用素“$x\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+5$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

[n＝6 のケース（６分割）]　作用素“$x\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+6$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

■＜ζ(2)分割微分方程式の n＝2～6 のケース＞

ζ(2)分割微分方程式

$$2x(x-1)y''-\{(4n-3)x-(4n-2)\}y'+n(2n-1)y=0$$

（n=1，2，3，・・）

作用素（演算子）“$2x(x-1)\frac{d^2}{dx^2}-\{(4n-3)x-(4n-2)\}\frac{d}{dx}+n(2n-1)$”の行列は、以下のように「一つ飛ばしの三角数と四角数の起点。列和の規則。」から構成される。

[n＝2 のケース（２分割）]　作用素“$2x(x-1)\frac{d^2}{dx^2}-(5x-6)\frac{d}{dx}+6$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

[n＝3 のケース（３分割）]　作用素“$2x(x-1)\frac{d^2}{dx^2}-(9x-10)\frac{d}{dx}+15$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

[n＝4 のケース（４分割）]　作用素“$2x(x-1)\frac{d^2}{dx^2}-(13x-14)\frac{d}{dx}+28$”に対応する行列は次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 32 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 28 \end{bmatrix}$$

[n＝5 のケース（５分割）]　作用素“$2x(x-1)\frac{d^2}{dx^2}-(17x-18)\frac{d}{dx}+45$”に対応する行列は次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 45 \end{bmatrix}$$

[n＝6 のケース（６分割）]　作用素“$2x(x-1)\frac{d^2}{dx^2}-(21x-22)\frac{d}{dx}+66$”に対応する行列は次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 72 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 66 \end{bmatrix}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

以上、このようになった。冒頭で述べた次のことを確認いただき、素晴らしい秩序を味わっていただきたい。

・L(1)分割微分方程式　⇒二つの三角数列。
・ラゲール微分方程式　⇒自然数列(1，2，3，4，・・)と四角数列。
・ξ(2)分割微分方程式　⇒一つ飛ばしの三角数列と四角数の起点。列和の規則。

まずL(1)とラゲールは、説明するまでもなく一目瞭然であろう。あまりにも美しすぎる。
なお、四角数列は、自然数列(1, 2, 3, 4,・・)に対応した平方数列のことである。四角数とは、ボールでだんだん大きな正方形を作っていくときに必要なボールの数である。

ζ(2)の「一つ飛ばしの三角数列と四角数の起点。列和の規則。」は少し難しいだろうか。
n=4を例に見てみよう。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 32 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 28 \end{bmatrix}$$

まず対角線の1 6 15 28は、これは「一つ飛ばしの三角数列」になっていることが簡単にわかる。(三角数列は 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ・・・)
では、もう一つの"32 30 24 14" の列はどうだろうか。
最初の32は、$2 \cdot 4^2$と、n=4の四角数(平方数)を含み、数列はそれが起点となっている。これが「四角数の起点」の意味である。
次に各列での数の合計を見ていくと、左から32 31 30 29 28と規則的に減少している。これが「列和の規則」である。
他のnでも同様になっている。このようなことから、

・ζ(2)分割微分方程式 ⇒一つ飛ばしの三角数列と四角数の起点。列和の規則。

と書いた。

このように作用素を行列で表現すると、微分方程式だけでは見えない驚くべき規則性が立ち現れるのである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****
●エルミート、ラゲール、ζ(2)分割、チェビシェフ、ルジャンドルは、スツルム-リウヴィル型微分方程式で統一的に解釈できる。
L(1)分割微分方程式だけは、スツルム-リウヴィル型から少し外れているのだろうか。

●ζ(2)分割微分方程式をスツルム-リウヴィル型に帰着させることにより、積分系での直交性の規則を見つけることができた。半年以上前からの課題であったが、ついに発見できた。L(1)の方はまだわからない。
****

2020.10.18 杉岡幹生

<参考文献>

●「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック (Muray R. Spiegel著、氏家勝巳訳、オーム社)」