# L(1)分割微分方程式の行列表現

二つ前の（その１７６）でL(1)分割微分方程式の行列表現の一例を示した。「微分方程式を行列で構成したらどうなるだろうか？」という問題意識から構成したものである。

そこでは５分割(n=5)の一例しか示していなかった。今回、n=2～7 つまり２分割から７分割までの行列表現を求めたので、結果を報告する。

結果を一言で述べると、次となる。

**L(1)分割微分方程式の作用素（演算子）の行列は、三角数から構成される。**

まず微分方程式と一般解を簡潔に示してから、n=5（５分割）の例で行列表現の導き方を示し（(その１７６）で示したもの)、次に n=2（２分割）～n=7（７分割）での行列を羅列する形で示す。

とにかく、以下の結果を眺めて味わっていただきたい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

（微分方程式から行列への変換の方法は、「物理とか（演算子の行列表現とその例)」サイトを参考にした）

************************************************************

**L (1) n 分割の微分方程式**

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \qquad \text{------}[1]$$

(n=・・-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3・・)

●L(1)分割微分方程式[1]の一般解（n が任意の整数値での解）

・

・

n=2 の場合　$y = c_1(x^2 -2x -1) + c_2(x^2 +2x -1)$

n=3 の場合　$y = c_1(x^3 -3x^2 -3x +1) + c_2(x^3 +3x^2 -3x -1)$

n=4 の場合　$y = c_1(x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1) + c_2(x^4 +4x^3 -6x^2 -4x +1)$

n=5 の場合　$y = c_1(x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1) + c_2(x^5 +5x^4 -10x^3 -10x^2 +5x +1)$

n=6 の場合　$y = c_1(x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1) + c_2(x^6 +6x^5 -15x^4 -20x^3 +15x^2 +6x -1)$

n=7 の場合　$y = c_1(x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1)$

$\qquad + c_2(x^7 +7x^6 -21x^5 -35x^4 +35x^3 +21x^2 -7x -1)$

・

・

ここで、$c_1$ と $c_2$ は任意の定数である。

************************************************************

n=5 の場合、[1]は次のようになる。

$$(x^2+1)y'' - 8xy' + 20y = 0 \qquad \text{-----}[1]\text{-}2$$

一般解の n＝5 の c1 側の基本解 $f(x)=x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1$ に対し、基底を $x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1$ とし、

$x^5$ を $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ に、$x^4$ を $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ に、$x^3$ を $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ に、$x^2$ を $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ に、$x$ を $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ に、1 を $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ に対応させる。

すると、上記の微分方程式[1]-2 は行列とベクトルで表現でき、次のようになる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\10&0&1&0&0&0\\0&6&0&3&0&0\\0&0&3&0&6&0\\0&0&0&1&0&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-5\\-10\\10\\5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \text{-----[1] -3}$$

ここで、左辺の行列が作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2}-8x\frac{d}{dx}+20$”に対応している。

また左辺のベクトルが $f(x)=x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1$ に対応している。

この行列で対称的に斜めに二列で走る 1　3　6　10 の数列は、多角数の一種の<u>三角数となっている</u>。

三角数は　　1,　3,　6,　10,　15,　21,　28,　36,　45,　55,　・・・
という数で、これはだんだんと大きな三角形の形にボールを積み上げていくときの個数である。n(n+1)/2 が三角数を生み出す公式である。

ちなみに n＝5 の一般解の $c_2$ 側の基本解 $g(x)=(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)$ のベクトルをとっても、上記と<u>同じ</u>作用素行列に対し、[1]-3 と同類の形が成り立つ。

以下、同様にして、n＝2（２分割）～n＝7（７分割）での作用素の行列を示す。

その行列は、L(1)分割微分方程式の作用素(演算子)“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2}-2(n-1)x\frac{d}{dx}+n(n-1)$”に対応する。

### [n＝2 のケース(２分割)]

作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}+2$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

### [n＝3 のケース(３分割)]

作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2}-4x\frac{d}{dx}+6$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**[n＝4 のケース（４分割）]**

作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2} - 6x\frac{d}{dx} + 12$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

**[n＝5 のケース（５分割）]**

作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2} - 8x\frac{d}{dx} + 20$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

**[n＝6 のケース（６分割）]**

作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2} - 10x\frac{d}{dx} + 30$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

**[n＝7 のケース（７分割）]**

作用素“$(x^2+1)\frac{d^2}{dx^2} - 12x\frac{d}{dx} + 42$”に対応する行列は、次となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

*************************************************************

　このようにどんどんと三角数が並んでいく！しかも二列の並び方が対称的で、あまりにもシンプルできれいである。

三角数：　1,　3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91,・・・

　微分方程式を眺めるだけでは、このような規則が存在していることは全くわからない。行列表現恐るべしである。なお、三角数は二項係数 $_nC_2$ でもある。

　次に、当然の疑問として「ξ⑵分割微分方程式の作用素はどんな行列になるのだろうか？」と思った。

**ξ⑵ｎ分割の微分方程式**

$$2x(x-1)y'' - \{(4n-3)x - (4n-2)\}y' + n(2n-1)y = 0$$

(n=1,　2,　3,・・)

　調べるとその作用素の行列は、一つ飛ばしの三角数と四角数の起点から構成されると分かった。
わかりにくいかもしれないが、とにかく面白い形になる。下記の二番目も参照。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

*************************************************************

●微分方程式では見えない規則が、行列にすると見えるというのは全く面白い。

　よく考えると、行列は２次元的な表現である。微分方程式は１次元的表現。よって表示できる情報量が違うのだと思う。行列のほうがより多くの情報を載せられ、よって隠れた規則まで表に出るのだと思われる。

　今回の状況を見ていると、それはまるで折りたたまれたＤＮＡがほどかれて、隠れた符号が表に出てきた、という感じがする。

●上で言及したξ⑵微分方程式だけでなく、チェビシェフ微分方程式、ルジャンドル微分方程式、ラゲール微分方程式、エルミート微分方程式の行列表現も調べてみた。

　その結果、やはりそれらにも面白い規則があると分かった。

　以下、L⑴分割微分方程式も含めて、それらの作用素の行列の特徴を一言でまとめる。

・L(1)分割微分方程式　⇒二つの三角数列。
・エルミート微分方程式　⇒自然数列(1, 2, 3, 4,・・)と三角数列。
・ラゲール微分方程式　⇒自然数列(1, 2, 3, 4,・・)と四角数列。
・ξ(2)分割微分方程式　⇒一つ飛ばしの三角数列と四角数の起点。二列和の規則。
・チェビシェフ微分方程式　⇒三角数列と四角数の起点。二列和の規則。
・ルジャンドル微分方程式　⇒三角数列と三角数の起点。二列和の規則。

コメント
（１）上の微分方程式はスツルム-リウヴィル型微分方程式に関係するものといえるが、その作用素の行列表現は自然数列、三角数列、四角数（四角数列）が基調となっているようである。
（２）四角数とは、ボールで正方形の形を作るときに必要なボールの数であり、それはつまり平方数の
1, 4, 9, 16, 25, 36,・・
のことである。

●じつはL(1)分割微分方程式には、他の微分方程式にはない特徴が一つある。それは、行列の１行目と２行目が全部0になっていることである。他のものは１行目のみが全部0となる。

●五角数、六角数を基調にするような行列に対応する微分方程式はあるのだろうか？
もしあるなら、現代数学でどのような位置にあるのか？

●ハイゼンベルグが量子力学を行列形式で表したとき、ヒルベルトが「行列形式があるなら、微分方程式もあるはずだ！」と叫んだとか。誰も信じなかったが、ほどなくしてシュレーディンガー方程式が現れた。
今回のL(1)分割微分方程式では、ちょうどその逆方向を見たことになるだろう。

●ハイゼンベルグの複雑な計算を見て、「それは昔習った行列の計算ではなかろうか」と師匠のボルンが思い、調べたらそうであり、それで行列力学が作られた。ハイゼンベルグが行列に気づかなかったのはふしぎな気がするが、それは今だから言えるのであって、当時行列は知られたものではなかったようである。
本「素数に憑かれた人たち」によれば、「行列は、1856年にアーサー・ケーリーが発明して以来ずっとあるにはあったが、1925年に量子力学が離陸するまでは通貨のようには出回っていなかった。」とのことである。
行列が誕生したのは比較的最近？である。ハイゼンベルグが行列を知らなかったのも無理はない。現在は高校生でも知っているが、それを当時の状況に単純に当てはめてはいけない。

************************************************************

2020.10.11　杉岡幹生

＜参考文献＞

●「素数に憑かれた人たち」（ジョン・ダービーシャー著、日経BP社）
●「マスペディア　1000」（リチャード・エルウィス著、宮本寿代訳、ディスカヴァー・トゥエンティワン）
●　サイト「物理とか（演算子の行列表現とその例）」