＜ $\zeta(4)$の２分身、３分身を解に持つ固有方程式 ＞

リーマンゼータ$\zeta(s)$の$\zeta(4)$のｎ分身の値を解にもつ固有方程式は、まだ示していなかった。今回、$\zeta(4)$の２分割、３分割の値を解にもつ固有方程式を求めたので報告したい。

２年前の（その１７）で２分割（２分身）は報告したが、まだ３分割（３分身）は示していなかったので、２分身の結果とともにそれを先に示す。その後に固有方程式を示す。

なお、これまでと同様に、$\zeta(4)$と本質的に同じ$Z(4)$の分身として求めている。$Z(s)$は次のもので、本質的に$\zeta(s)$に等しいものである。なぜなら以下のように変形でき、それは$\zeta(s)$そのものだからである。

$$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+1/9^s+1/11^s+\cdots \qquad \text{-----①}$$

$$\begin{aligned}Z(s)&=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+1/9^s+1/11^s+\cdots\\&=1+1/2^s+1/3^s+1/4^s+1/5^s+1/6^s+1/7^s\cdots-(1/2^s+1/4^s+1/6^s+\cdots)\\&=\zeta(s)-1/2^s\zeta(s)\\&=(1-1/2^s)\zeta(s) \qquad \text{-----②}\end{aligned}$$

これより、$\zeta(4)$の分身の値は$Z(4)$のそれを見ればよいとわかる。$\zeta(4)$は$\zeta(4)=\pi^4/90$であり、②より$Z(4)=\pi^4/96$となる。

ではまず２分割、３分割の結果を示す。

■$Z(4)$ ２分割

$$A1=1+1/7^4+1/9^4+1/15^4+1/17^4+1/23^4+\cdots=(\pi/8)^4\{1+2\sin^2(3\pi/8)\}/\{3\cos^4(3\pi/8)\}$$

$$A2=1/3^4+1/5^4+1/11^4+1/13^4+1/19^4+1/21^4+\cdots=(\pi/8)^4\{1+2\sin^2(\pi/8)\}/\{3\cos^4(\pi/8)\}$$

$A1+A2=Z(4)$となっている。$A1, A2$が２分身である。

■$Z(4)$ ３分割

$$B1=1+1/11^4+1/13^4+1/23^4+1/25^4+1/35^4+\cdots=(\pi/12)^4\{1+2\sin^2(5\pi/12)\}/\{3\cos^4(5\pi/12)\}$$

$$B2=1/3^4+1/9^4+1/15^4+1/21^4+1/27^4+1/33^4+\cdots=(\pi/12)^4\{1+2\sin^2(3\pi/12)\}/\{3\cos^4(3\pi/12)\}$$

$$B3=1/5^4+1/7^4+1/17^4+1/19^4+1/29^4+1/31^4+\cdots=(\pi/12)^4\{1+2\sin^2(\pi/12)\}/\{3\cos^4(\pi/12)\}$$

$B1+B2+B3=Z(4)$なっている。$B1, B2, B3$が３分身である。（$B2$は本質的に$Z(4)$そのもの）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上の分割級数の導出過程を簡単に述べる。

タンジェントの部分分数展開式Ｇ[1](x)は次の通りである。

$G[1](x)=1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを３回微分して得られる次のＧ[4](x)を使う。

$G[4](x)=1/(1^2-x^2)^4+1/(3^2-x^2)^4+1/(5^2-x^2)^4+\cdots$

$=(\pi/(4x))^4\{1+2\sin^2(\pi x/2)\}/\{3\cos^4(\pi x/2)\}+\mathrm{Others}(x)$ ---③

ここで右辺の Others(x)は目的のゼータ値には関係しない項なので”Others(x)”とした。

上記③のｘに特定の値を代入することで分割級数（分身）が次々に求まっていく。以下の通り。

③のｘに値 3/4 を代入すると、Z(4)の A1 が得られる。

③のｘに値 1/4 を代入すると、Z(4)の A2 が得られる。

③のｘに値 5/6 を代入すると、Z(4)の B1 が得られる。

③のｘに値 3/6 を代入すると、Z(4)の B2 が得られる。

③のｘに値 1/6 を代入すると、Z(4)の B3 が得られる。

以上。

（注記）②の左辺級数からＬ(1)とζ(2)とＬ(3)の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺のＬ(1)とζ(2)とＬ(3)の分割級数に対応した値が Others(x)から出るが、それも無視する。興味がないものは Others(x)に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単に Z(4)の分割級数（分身）を求めることができる。Z(6)、Z(8)・・でも同様にできる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにζ(4)すなわち Z(4)の2分身と3分身が求まった。

それらを解にもつ固有方程式を示すと、以下となる。解の公式から得られた結果(√での表現)も同時に示す。

２分身を解にもつ固有方程式： $9x^2-384x+224=0$ ----④

二解は、$x_1=(64+44\sqrt{2})/3$、$x_2=(64-44\sqrt{2})/3$

３分身を解にもつ固有方程式： $27x^3-5832x^2+17856x-6656=0$ ----⑤

三解は、$x_1=(320+184\sqrt{3})/3$、$x_2=8/3$、$x_3=(320-184\sqrt{3})/3$

これらの解の値は、上方での■Z(4)２分割 、■Z(4)３分割での右辺値の{ }の値と一致する。

注記:2分身の④では$(\pi/8)^4$を除いた$\{1+2\sin^2(3\pi/8)\}/\{3\cos^4(3\pi/8)\}$、$\{1+2\sin^2(\pi/8)\}/\{3\cos^4(\pi/8)\}$を、また３分身の⑤では$(\pi/12)^4$を除いた$\{1+2\sin^2(5\pi/12)\}/\{3\cos^4(5\pi/12)\}$、$\{1+2\sin^2(3\pi/12)\}/\{3\cos^4(3\pi/12)\}$、$\{1+2\sin^2(\pi/12)\}/\{3\cos^4(\pi/12)\}$を解にもつ。

④、⑤は、注記の値を用いて、解と係数の関係を使い計算していくと自然に導かれる。

⑤は、次のように因数分解でき、簡単に解ける。2次方程式に還元されるところがミソである。

$$(3x-8)(9x^2-1920x+832)=0 \qquad ----⑤\text{-}2$$

３分身の解の一つは $x_2=8/3$ と有理数になったが、それは B2 が Z(4)そのものになっていることに起因する。次を観察されたし。

$$B2=1/3^4+1/9^4+1/15^4+1/21^4+1/27^4+1/33^4+\cdots=(\pi/12)^4\{1+2\sin^2(3\pi/12)\}/\{3\cos^4(3\pi/12)\}$$

これまでの繰り返しになるが、奇数分割の真ん中の値は、真の分身ではなく、元のゼータそのものになる。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****

●ζ(4)つまり Z(4)の2分割、3分割やそこからフラクタル的に派生する無数の分身たちは、すべて作図可能数（有理数と√ばかりで構成された数）となることは確実であろう。つまり、その値に ${}^3\sqrt{}$とか ${}^5\sqrt{}$などは現れない。

（その170）、（その171）の L(1)での三角関数値が作図可能数になったので、論理的に考えてそうなる。フラクタル的に分裂する分身たちの値を解に持つ高次固有方程式は、作図可能数を係数にもつ2次方程式に因数分解される。

●Z(4)の7分身や11分身やそこから無数に派生する分身たちが作図可能数にならないことは確実である。

なぜなら7や11はフェルマー素数でないから。

●ゼータの分割では、2分割、3分割、5分割、17分割、257分割、65537分割の各分割から派生してできる分身たちの値が作図可能数となる。

なぜなら 3、5、17、257、65537 がフェルマー素数だから。2 は一般にはフェルマー素数ではないが、2分割での2分身が作図可能数（有理数と√のみ）となるのは、見てきた通り。

●2分割、3分割、5分割、17分割、257分割、65537分割以外で、作図可能数となるゼータの分割は存在しないのだろうか？

もし新たなフェルマー素数Kが発見されたら、ただちにゼータK分割の値とそこから派生する分身たちは作図可能数になる。

結局、上の問いへの答えは、新しいフェルマー素数があるかどうかにかかっている。

****

2020.10.4　杉岡幹生