＜ L(1)ガウス微分方程式の解（Goldberg 関係式）、解の鏡映と回転 ＞

“L(1) n 分割の微分方程式”（L(1)分割微分方程式と略す）の解について、ある結果が得られたので簡潔に報告する。それは以前から少し気になっていたことでもある。

それを先に報告する。最後に、本日発見したまた別の新しい事実（解の鏡映と回転）を粗く述べる。

L (1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0$$

(n=・・-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3・・)

復習になるが、この微分方程式は、ゼータ L(s)の L(1)の n 分割での n 個の分身を生み出す（解にもつ）方程式の多項式関数を解にもつものである。

さて、昨年、佐藤郁郎氏から、この微分方程式の解が「高次元空間がねじれる前」を表す Goldberg 関係式と似ているとの指摘をもらった。それは（その１１２）で報告した。気になっていたのは、そのことである。

上の微分方程式に対し x＝(2t-1)/i と変数変換すると、次の超幾何微分方程式(1)に移行することができる。（その１１８）の③式に-1 を掛けたものが次の(1)である。

$$x(1-x)y'' + \{(1-n) - 2(1-n)x\}y' - n(n-1)y = 0 \qquad \text{----(1)}$$

注記：{ } の所はもう少しきれいにまとめることもできるが、超幾何微分方程式を意識しやすいこの形で示した。

(1)の解は Goldberg 関係式にさらに似たものになったが、まだ少しだけ違っていることを（その１１８） で伝えた。

(1)は公式集などにも載っている有名な超幾何微分方程式（ガウスの微分方程式）の特殊ケースになっている。ちなみに、超幾何微分方程式（ガウスの微分方程式）は次のものである。

$$x(1-x)y'' + \{c-(a+b+1)x\}y' - aby = 0$$

これと(1)を比較して、a＝－n, b＝1－n, c＝1－n であると分かる。

今回(1)の解を改めて調べて、(1)の基本解の一つは、Goldberg 関係式になっていると分かった。
(1)の一般解は次となる。

n＝1　$y=A+Bx$
n＝2　$y=A(1-2x)+Bx^2$
n＝3　$y=A(1-3x+3x^2)+Bx^3$
n＝4　$y=A(1-4x+6x^2-4x^3)+Bx^4$
n＝5　$y=A(1-5x+10x^2-10x^3+5x^4)+Bx^5$
n＝6　$y=A(1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5)+Bx^6$
・
・

A,B は任意の定数

このように、基本解の A の側が Goldberg 関係式（本質的に同じもの）になる。ガウスの微分方程式は一般解が公式化されていて（超幾何関数のもの）、上記(1)の一般解もその公式から得た。

上の A 側の方の基本解が （その１１８）での Goldberg 関係式になっていることを確認いただきたい。
すなわち、次のものである。

$1 -3x +3x^2$

$1 -4x +6x^2 -4x^3$

$1 -5x +10x^2 -10x^3 +5x^4$

$1 -6x +15x^2 -20x^3 +15x^4 -6x^5$

・

・

１年前は上の解での A 側，B 側に特定の値を入れた特別なケースを出して、それが$(1-x)^n$の２項数展開式に一致するとして喜んでいたのだが、本質的な解は上の一般解となる。

L(1)分割微分方程式と超幾何微分方程式(1)は $x=(2t-1)/i$ という変数変換のトンネルでつながっている。そして今回の結果から、ゼータの分割近辺は、幾何学とも関係がありそうである。いろいろなものがつながるのはうれしいことである。

最後に、今日発見したばかりの事実を粗く示しておく。

****

● L(1)分割微分方程式の一般解を考察していて、面白い事実に気づいた。
以下の一般解の c_1 側の解と、c_2 側の解の多項式関数をグラフで見ると、それらは互いに鏡映の関係または 180° 回転（座標原点を中心に反時計周り）の関係になっているとわかった。

関数の最高次数が偶数の場合は前者、奇数の場合は後者となる。結局、次のようになっている。

二つの基本解の関数で最高次が偶数の場合、それらのグラフは y 軸(x=0 の直線)に対し鏡映の関係となる。
二つの基本解の関数で最高次が奇数の場合、それらのグラフは座標原点を中心に反時計周りに 180° 回転の関係となる。

具体的に述べると、例えば、n＝4（偶数）の場合の
$y=c_1(x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1) +c_2(x^4 +4x^3 -6x^2 -4x +1)$
に関し、c_1 の $y=x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1$ と、c_2 の $y=x^4 +4x^3 -6x^2 -4x +1$ は、y 軸に対して鏡映の関係になっている。

また例えば、n=3（奇数）の場合の

$y = c_1(x^3 - 3x^2 - 3x + 1) + c_2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)$

に関し、c_1 の $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ と c_2 の $y = x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ のグラフは、座標原点を中心に反時計周りに 180° の回転の関係になっている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \qquad \text{-----}[1]$$

(n=・・-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3・・)

または

$$(x^2+1)^n \frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\} = n(1-n)y \qquad \text{------}[2]$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

L(1)分割微分方程式[1]、[2]の一般解（n が任意の整数値での解）

・

・

n=-7 の場合

$y = \{c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1) + c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)\}/(x^2+1)^7$

n=-6 の場合

$y = \{c_1(x^6 - 6x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 - 6x - 1) + c_2(x^6 + 6x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 6x - 1)\}/(x^2+1)^6$

n=-5 の場合　$y = \{c_1(x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1) + c_2(x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x + 1)\}/(x^2+1)^5$

n=-4 の場合　$y = \{c_1(x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1) + c_2(x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1)\}/(x^2+1)^4$

n=-3 の場合　$y = \{c_1(x^3 - 3x^2 - 3x + 1) + c_2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)\}/(x^2+1)^3$

n=-2 の場合　$y = \{c_1(x^2 - 2x - 1) + c_2(x^2 + 2x - 1)\}/(x^2+1)^2$

n=-1 の場合　$y = \{c_1(x - 1) + c_2(x+1)\}/(x^2+1)$

n=0 の場合　$y = c_1\tan^{-1}(x) + c_2$

n=1 の場合　$y = c_1(x - 1) + c_2(x+1)$

n=2 の場合　$y = c_1(x^2 - 2x - 1) + c_2(x^2 + 2x - 1)$

n=3 の場合　$y = c_1(x^3 - 3x^2 - 3x + 1) + c_2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)$

n=4 の場合　$y = c_1(x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1) + c_2(x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1)$

n=5 の場合　$y = c_1(x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1) + c_2(x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x + 1)$

n=6 の場合　$y = c_1(x^6 - 6x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 - 6x - 1) + c_2(x^6 + 6x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 6x - 1)$

n=7 の場合　$y = c_1(x^7 - 7x^6 - 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 - 7x + 1)$

$+ c_2(x^7 + 7x^6 - 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 - 7x - 1)$

・

・

ここで、c_1 と c_2 は任意の定数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(1)分割微分方程式の<u>一般解の基本解の二つが鏡映や回転の関係になっているというのは面白い！</u>

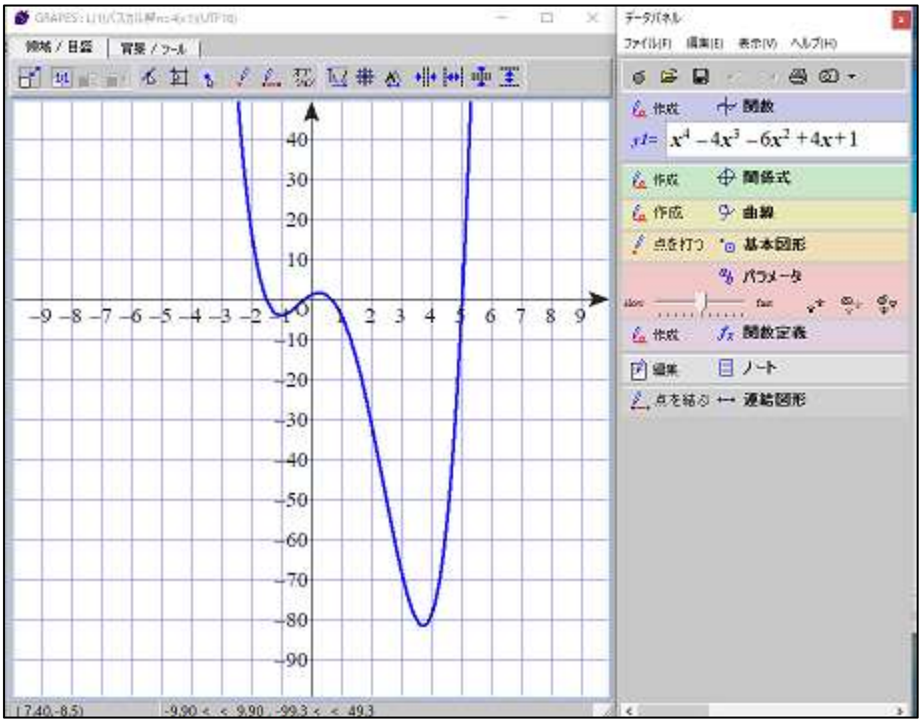
● 上で指摘した鏡映の関係をグラフで見てみよう。GRAPES というフリーソフトで描いた。

偶数の n＝4 の

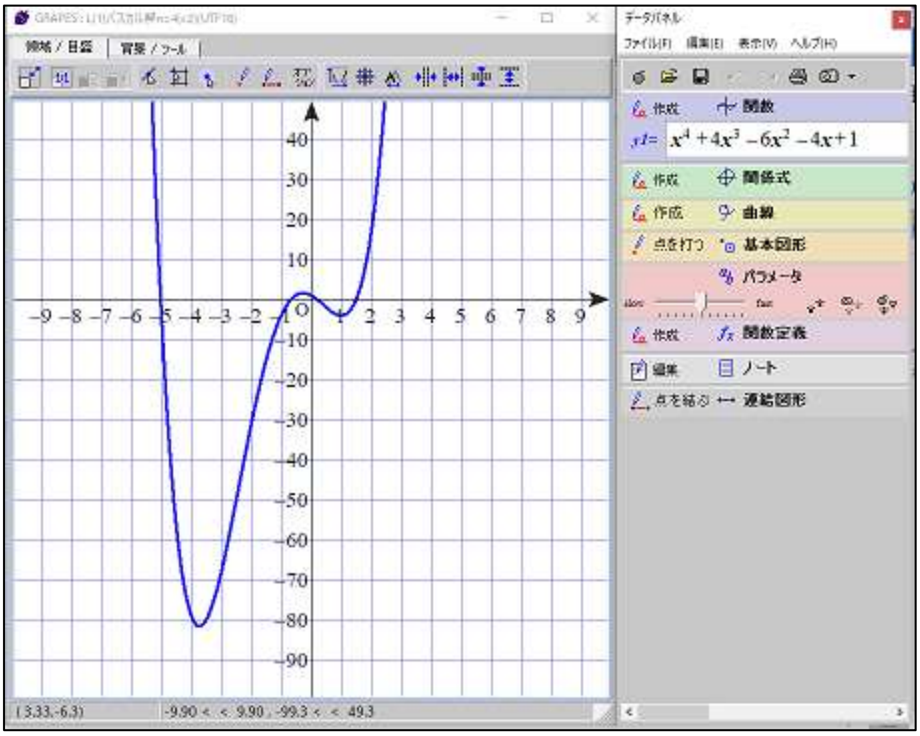
$y=c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)$

に関し、c_1 の $y=x^4-4x^3-6x^2+4x+1$ と、c_2 の $y=x^4+4x^3-6x^2-4x+1$ は、y 軸に対して鏡映の関係になっている。以下の通り。

c_1 の $y=x^4-4x^3-6x^2+4x+1$ のグラフ



c_2 の $y=x^4+4x^3-6x^2-4x+1$ のグラフ



このようにn=4の場合は、y軸に関して対称つまり鏡映の関係になっている。他の偶数の場合もそうなっている。今回は奇数の場合は略す。

● L(1)基本解が鏡映や回転の関係にあると分かった。では、ζ(2)の場合はどうなのだろうか？

この問いはまだ早い。なぜならζ(2)では一つの基本解は求まっているが、もう一つ別の基本解がまだ見つかっていないから。

厳密にいうと、もう一つの基本解は、公式の（超幾何関数の）級数の形では得られているが、そのような級数の形でなく多項式またはその類似の形で求めたい。それがあるはず！と思っているが、見つけられていない。

もしかしたらζ(2)の二つの基本解も鏡映の関係になっているのではないか？もしそうなら鏡映や回転などの関係を使うことで、もう一つの基本解が得られないか？

● L(1)の一般解における二つの基本解が、鏡映や回転の関係になっているというのは、きわめて興味深い。

結局、二つの基本解の関数のグラフの形は全く変わらず、単に鏡映や回転で移り変わるのである！

ここは深いところにつながっている気がする。

****

2020.9.13　杉岡幹生