＜ L(3) 分割微分方程式（n=2 の場合） ＞

「L(3)の分割微分方程式はまだ得られていない」と（その１７２）の最後で述べた。n=2 の２分身のケースだけ見つかったので報告する。結論から述べれば、次となった。

$$(x^2+8)y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad \text{-----A1}$$

L(3) ２分身の値を生み出す（解にもつ）方程式は、（その１３６）などで示した通り、次である。

２分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^2 -16x -8=0$

上記 A1 の微分方程式は、上記方程式の多項式関数の

$y=x^2 -16x -8$ -----A2

を特殊解にもつとわかったということである。

なお、L(3)は、L(s)ゼータの s＝3 のもので次のものである。

$L(3)=1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +1/9^3 -1/11^3 +1/13^3 -1/15^3 +\cdots=\pi^3/32$

これまで L(1)とζ(2)の分身を生み出す方程式の多項式関数を解にもつ微分方程式は以下の通り出している。そこまで求まっているので L(3)も簡単に出る！と思っていたが、簡単ではない。いまの所、冒頭で示した L(3) ２分割の n=2 のものしか見つかっていない。

今回の L(3)の説明の前に、L(1)とζ(2)の結果をまとめておく。

L (1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \qquad \text{------[1]}$$

(n=・・-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3・・)

または

$$(x^2+1)^n \frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\} = n(1-n)y \qquad \text{------[2]}$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

●L(1)分割微分方程式[1]、[2]の一般解（n が任意の整数値での解）

・

・

n=-7 の場合

$y=\{c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1) +c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)\}/(x^2+1)^7$

n=-6 の場合

$y=\{c_1(x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1) +c_2(x^6 +6x^5 -15x^4 -20x^3 +15x^2 +6x -1)\}/(x^2+1)^6$

n＝-5 の場合　$y=\{c_1(x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1)+c_2(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)\}/(x^2+1)^5$

n＝-4 の場合　$y=\{c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)\}/(x^2+1)^4$

n＝-3 の場合　$y=\{c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)\}/(x^2+1)^3$

n＝-2 の場合　$y=\{c_1(x^2-2x-1)+c_2(x^2+2x-1)\}/(x^2+1)^2$

n＝-1 の場合　$y=\{c_1(x-1)+c_2(x+1)\}/(x^2+1)$

n＝0 の場合　$y=c_1\tan^{-1}(x)+c_2$

n＝1 の場合　$y=c_1(x-1)+c_2(x+1)$

n＝2 の場合　$y=c_1(x^2-2x-1)+c_2(x^2+2x-1)$

n＝3 の場合　$y=c_1(x^3-3x^2-3x+1)+c_2(x^3+3x^2-3x-1)$

n＝4 の場合　$y=c_1(x^4-4x^3-6x^2+4x+1)+c_2(x^4+4x^3-6x^2-4x+1)$

n＝5 の場合　$y=c_1(x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1)+c_2(x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+1)$

n＝6 の場合　$y=c_1(x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1)+c_2(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)$

n＝7 の場合　$y=c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1)$

$+c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)$

・

・

ここで、c_1 と c_2 は任意の定数である。

[L(1)分割微分方程式におけるシンプルな表現の特殊解①]

一般解において、$c_1=c_2=1$ として得られた特殊解を示す。（微分方程式が線形だから全体に掛かる 2 は省いた）

・

・

n＝-7 の場合　$y=(x^7-21x^5+35x^3-7x)/(x^2+1)^7$

n＝-6 の場合　$y=(x^6-15x^4+15x^2-1)/(x^2+1)^6$

n＝-5 の場合　$y=(x^5-10x^3+5x)/(x^2+1)^5$

n＝-4 の場合　$y=(x^4-6x^2+1)/(x^2+1)^4$

n＝-3 の場合　$y=(x^3-3x)/(x^2+1)^3$

n＝-2 の場合　$y=(x^2-1)/(x^2+1)^2$

n＝-1 の場合　$y=x/(x^2+1)$

n＝0 の場合　$y=1$

n＝1 の場合　$y=x$

n＝2 の場合　$y=x^2-1$

n＝3 の場合　$y=x^3-3x$

n＝4 の場合　$y=x^4-6x^2+1$

n＝5 の場合　$y=x^5-10x^3+5x$

n＝6 の場合　$y=x^6-15x^4+15x^2-1$

n＝7 の場合　$y=x^7-21x^5+35x^3-7x$

・

・

[L(1)分割微分方程式におけるシンプルな表現の特殊解②]

一般解において、c_1=-1, c_2=1 として得られた特殊解を示す。（微分方程式が線形だから全体に掛かる 2 は省いた）

・

・

n=-7 の場合　$y=(7x^6-35x^4+21x^2-1)/(x^2+1)^7$

n=-6 の場合　$y=(6x^5-20x^3+6x)/(x^2+1)^6$

n=-5 の場合　$y=(5x^4-10x^2+1)/(x^2+1)^5$

n=-4 の場合　$y=(4x^3-4x)/(x^2+1)^4$

n=-3 の場合　$y=(3x^2-1)/(x^2+1)^3$

n=-2 の場合　$y=2x/(x^2+1)^2$

n=-1 の場合　$y=1/(x^2+1)$

n=0 の場合　$y=0$

n=1 の場合　$y=1$

n=2 の場合　$y=2x$

n=3 の場合　$y=3x^2-1$

n=4 の場合　$y=4x^3-4x$

n=5 の場合　$y=5x^4-10x^2+1$

n=6 の場合　$y=6x^5-20x^3+6x$

n=7 の場合　$y=7x^6-35x^4+21x^2-1$

・

・

＜L(1)分割微分方程式の解 $L_n(x)$ に対する漸化式＞

$$L_{n+2}(x)-2xL_{n+1}(x)+(x^2+1)L_n(x)=0 \quad \text{-----[3]}$$

(n=・・, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3・・)

上記の微分方程式の解の多項式間に成立する漸化式である。

例えば、n=4 の $L_4(x)=4x^3-4x$、n=3 の $L_3(x)=3x^2-1$、n=2 の $L_2(x)=2x$ でこの漸化式が成立することを確認いただきたい。

● ξ(2)分割微分方程式に関しては、以下の状態で止まったままである。

一般解はまだ見いだせていない。もう一つの特殊解が見つけられていないため。

ξ(2) n 分割の微分方程式

$$2x(x-1)y''-\{(4n-3)x-(4n-2)\}y'+n(2n-1)y=0 \quad \text{----①}$$

(n=1, 2, 3, ・・)

または

$$x\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}\left\{x\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}(y/x^n)\right\}=-n^2(y/x^n) \quad \text{----②}$$

①と②は本質的に同じ微分方程式である。

ζ(2)１分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x-2=0$
ζ(2)２分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^2-8x+8=0$
ζ(2)３分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^3-18x^2+48x-32=0$
ζ(2)４分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^4-32x^3+160x^2-256x+128=0$
ζ(2)５分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^5-50x^4+400x^3-1120x^2+1280x-512=0$
ζ(2)６分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^6-72x^5+840x^4-3584x^3+6912x^2-6144x+2048=0$
ζ(2)７分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^7-98x^6+1568x^5-9408x^4+26880x^3-39424x^2+28672x-8192=0$
・
・

n分身の値を解に持つ固有方程式（代数方程式）の多項式を $Z_n(x)$ とおくと、上記から次となる。
下記の漸化式③は、nが負の値でも成り立つのでその場合の多項式も記した。（その多項式関数は、微分方程式①，②の解となる）

＜多項式 $Z_n(x)$ ＞

・
・

$Z_{-7}(x)=(x^7-98x^6+1568x^5-9408x^4+26880x^3-39424x^2+28672x-8192)/x^{14}$
$Z_{-6}(x)=(x^6-72x^5+840x^4-3584x^3+6912x^2-6144x+2048)/x^{12}$
$Z_{-5}(x)=(x^5-50x^4+400x^3-1120x^2+1280x-512)/x^{10}$
$Z_{-4}(x)=(x^4-32x^3+160x^2-256x+128)/x^8$
$Z_{-3}(x)=(x^3-18x^2+48x-32)/x^6$
$Z_{-2}(x)=(x^2-8x+8)/x^4$
$Z_{-1}(x)=(x-2)/x^2$
$Z_0(x)=1$
$Z_1(x)=x-2$
$Z_2(x)=x^2-8x+8$
$Z_3(x)=x^3-18x^2+48x-32$
$Z_4(x)=x^4-32x^3+160x^2-256x+128$
$Z_5(x)=x^5-50x^4+400x^3-1120x^2+1280x-512$
$Z_6(x)=x^6-72x^5+840x^4-3584x^3+6912x^2-6144x+2048$
$Z_7(x)=x^7-98x^6+1568x^5-9408x^4+26880x^3-39424x^2+28672x-8192$
・
・

上記の多項式 $Z_n(x)$ に対する漸化式は、次のようになる。

＜ζ(2)分割固有方程式の多項式 $Z_n(x)$ に対する漸化式＞

$$Z_{n+2}(x)-2(x-2)Z_{n+1}(x)+x^2Z_n(x)=0 \quad \text{-----③}$$

（n=・・-3,-2,-1,0,1,2,3・・）

さて、L(3)のケースを見よう。
（その１３６）で示した通り、L(3)分身の値を解にもつ固有方程式（代数方程式）は次のようになる。（１分身～６分身まで求めていた。）

****
[L(3)分割におけるn分身の値を解にもつ代数方程式]
1分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x-2=0$
2分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^2-16x-8=0$
3分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^3-54x^2-96x+32=0$
4分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^4-128x^3-544x^2+512x+128=0$
5分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^5-250x^4-2080x^3+4000x^2+2560x-512=0$
6分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^6-432x^5-6216x^4+20992x^3+25344x^2-12288x-2048=0$
****

今回、２分身での「2分身を解にもつ代数方程式 ⇒ $x^2-16x-8=0$」での $y=x^2-16x-8$ を特殊解にもつ微分方程式が求まったというわけである。冒頭で示した次である。

$$(x^2+8)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad \text{-----A1}$$

いま現在、これをｎ分身のケースに一般化できていない。

面白いことに、L(1)の類似から、L(3)でもシンプル解を構成できると気づいた。n=2 でシンプル解を構成できる。$y=x^2-16x-8$ が解ならば、もう一つ別の $y=x^2+16x-8$ も解（特殊解）になっている。つまり、<u>係数の符号を”＋－－“から”＋＋－“に変えるだけ</u>である。

よって、A1 の一般解は $y=c_1(x^2-16x-8)+c_2(x^2+16x-8)$ となる。
$c_1=c_2=1$ としてシンプル解 $y=x^2-8$ が得られた。(2 で割った)
$c_1=-1,\ c_2=1$ としてまた別のシンプル解 $y=16x$ が得られた。(2 で割った)

この二つの独立なシンプル解（特殊解）も A1 をもちろん満たしている。

n=2 のケースから、L(3)の一般解は次のようにL(1)の類似になっていることは確実である。
****
●L(3)分割微分方程式（<u>一般のものは未発見</u>）の一般解（n が任意の整数値での解）
n=1 の場合　$y=c_1(x-2)+c_2(x+2)$
n=2 の場合　$y=c_1(x^2-16x-8)+c_2(x^2+16x-8)$
n=3 の場合　$y=c_1(x^3-54x^2-96x+32)+c_2(x^3+54x^2-96x-32)$
n=4 の場合　$y=c_1(x^4-128x^3-544x^2+512x+128)+c_2(x^4+128x^3-544x^2-512x+128)$
n=5 の場合　$y=c_1(x^5-250x^4-2080x^3+4000x^2+2560x-512)$
$+c_2(x^5+250x^4-2080x^3-4000x^2+2560x+512)$
n=6 の場合　$y=c_1(x^6-432x^5-6216x^4+20992x^3+25344x^2-12288x-2048)$
$+c_2(x^6+432x^5-6216x^4-20992x^3+25344x^2+12288x-2048)$

・
・
ここで、c_1 と c_2 は任意の定数である。

[L(3)分割微分方程式におけるシンプルな表現の特殊解①]

一般解において、$c_1=c_2=1$ として得られた特殊解を示す。(微分方程式が線形だから全体に掛かる 2 は省いた)

・
・
n＝1 の場合　$y=x$
n＝2 の場合　$y=x^2-8$
n＝3 の場合　$y=x^3-96x$
n＝4 の場合　$y=x^4-544x^2+128$
n＝5 の場合　$y=x^5-2080x^3+2560x$
n＝6 の場合　$y=x^6-6216x^4+25344x^2-2048$
・
・

[L(3)分割微分方程式におけるシンプルな表現の特殊解②]

一般解において、$c_1=-1$, $c_2=1$ として得られた特殊解を示す。(微分方程式が線形だから全体に掛かる 2 は省いた)

・
・
n＝1 の場合　$y=2$
n＝2 の場合　$y=16x$
n＝3 の場合　$y=54x^2-32$
n＝4 の場合　$y=128x^3-512x$
n＝5 の場合　$y=250x^4-4000x^2+512$
n＝6 の場合　$y=432x^5-20992x^3+12288x$
・
・
****

L(3)の状況はこのような感じである。
一般のｎ分身のケースの微分方程式が求まっていないのに、一般解だけｎのケースで分かるというのも不思議な感覚だが、そうなっていることは確実であろう。

これらのシンプル解を見てどう思われるだろうか。もともとの固有方程式（代数方程式）での多項式よりも、簡潔で見やすいものになったと思われないだろうか。なお、特殊解②の方は全体にかかる定数をもっと単純化できるが、このままにしておく。

それにしても特にL(1)の一般解の形は簡潔で美しい。係数も簡単だが、とにかく+,-の符号の並びがきれいである。

一つの解（c_1側）は“＋ － － ＋ ＋ － － ＋ ＋ － － ＋ ＋ － － ＋・・”

もう一つの解（c_2側）は“＋ ＋ － － ＋ ＋ － － ＋ ＋ － － ＋ ＋ － －・・”

このように符号が一つずれているだけである。この単純さ！はなんなのだろう。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****

●ζ(2)の解を構成する多項式は、チェビシェフ多項式に変換できるので、本質的には知られた直交多項式ということができる。

しかし、L(1)の多項式（L(3)の多項式も）は、知られていない気がする。しかしその重要性はチェビシェフ多項式に匹敵する。

地下深くに未発見のまま眠っている直交多項式は多いのではないか。

●L(1)では多項式の符号を“＋ － － ＋ ＋ － － ＋・・”から“＋ ＋ － － ＋ ＋ － －・・”のように、一つずらすだけで別の独立な特殊解を得ることができた。前者が一般解における c_1( )の解で、後者が c_2( )の解である。

ところが、ζ(2)の解を観察すると、“＋ － ＋ － ＋ －・・”と交互に並んでいて、L(1)のようにできず、簡単に別解が得られない。いったいどうやったら、もう一つの別解が得られるのか？

****

2020.8.30　杉岡幹生