

< L(1)分割微分方程式のシンプル解まとめ >

L(1)分割微分方程式に対し（[その157](#)）で一般解を報告し、（[その158](#)）でその一般解からシンプルな形の特殊解を見出した。今回は、もう一つ別のシンプルな形の特殊解を構成する。

シンプルな形の特殊解を短く“シンプル解”と呼ぶこともあるので、了解いただきたい。

微分方程式の解は本質的に一般解で尽きている。しかし以前より考察してきたパスカル三角形の数を係数にもつ解の形よりシンプル解の形のほうが、エルミート多項式やチェビシェフ多項式の有名直交多項式の表現に近いので、そちらの形でまとめておきたい。

なお、“L(1)分割微分方程式”は、L(1)分身を生み出す(解に持つ)固有方程式の多項式関数を解に持つ微分方程式である。

したがって、それはL(s)ゼータにとって母なる根源的な微分方程式といえる。

L(1)は、L(s)ゼータのs=1のもので、次のものである。

$$L(1)=1 -1/3 +1/5 -1/7 +1/9 -1/11 +1/13 -1/15 + \cdots = \pi/4$$

さて、前回の（[その158](#)）の結果に今回のもう一つのシンプル解も加えて示すと、以下の通りである。

[L(1)分割微分方程式のシンプルな表現の特殊解②]が今回加えたものである。なお、前回n=0の場合の一般解は略していたが、今回計算して得た解を加えた。

L(1) n分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \quad \text{-----}[1]$$

(n=...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...)

または

$$(x^2+1)^n \frac{d}{dx} \left\{ (x^2+1)^{1-n} \frac{dy}{dx} \right\} = n(1-n)y \quad \text{-----}[2]$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

●L(1)分割微分方程式[1]、[2]の一般解（nが任意の整数値での解）

・
・

n=-7の場合

$$y = \{c_1(x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1) + c_2(x^7+7x^6-21x^5-35x^4+35x^3+21x^2-7x-1)\} / (x^2+1)^7$$

n=-6の場合

$$y = \{c_1(x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1) + c_2(x^6+6x^5-15x^4-20x^3+15x^2+6x-1)\} / (x^2+1)^6$$

$$\begin{aligned}
n=-5 \text{ の場合} \quad & y = \{c_1(x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1) + c_2(x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x + 1)\} / (x^2+1)^5 \\
n=-4 \text{ の場合} \quad & y = \{c_1(x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1) + c_2(x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1)\} / (x^2+1)^4 \\
n=-3 \text{ の場合} \quad & y = \{c_1(x^3 - 3x^2 - 3x + 1) + c_2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)\} / (x^2+1)^3 \\
n=-2 \text{ の場合} \quad & y = \{c_1(x^2 - 2x - 1) + c_2(x^2 + 2x - 1)\} / (x^2+1)^2 \\
n=-1 \text{ の場合} \quad & y = \{c_1(x - 1) + c_2(x+1)\} / (x^2+1) \\
n=0 \text{ の場合} \quad & y = c_1 \tan^{-1}(x) + c_2 \\
n=1 \text{ の場合} \quad & y = c_1(x - 1) + c_2(x+1) \\
n=2 \text{ の場合} \quad & y = c_1(x^2 - 2x - 1) + c_2(x^2 + 2x - 1) \\
n=3 \text{ の場合} \quad & y = c_1(x^3 - 3x^2 - 3x + 1) + c_2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1) \\
n=4 \text{ の場合} \quad & y = c_1(x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1) + c_2(x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1) \\
n=5 \text{ の場合} \quad & y = c_1(x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1) + c_2(x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x + 1) \\
n=6 \text{ の場合} \quad & y = c_1(x^6 - 6x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 - 6x - 1) + c_2(x^6 + 6x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 6x - 1) \\
n=7 \text{ の場合} \quad & y = c_1(x^7 - 7x^6 - 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 - 7x + 1) \\
& \quad \quad \quad + c_2(x^7 + 7x^6 - 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 - 7x - 1)
\end{aligned}$$

・
・

ここで、 c_1 と c_2 は任意の定数である。

[L(1) 分割微分方程式におけるシンプルな表現の特殊解①]

一般解において、 $c_1=c_2=1$ として得られた特殊解を示す。(微分方程式が線形だから全体に掛かる 2 は省いた)

・
・

$$\begin{aligned}
n=-7 \text{ の場合} \quad & y = (x^7 - 21x^5 + 35x^3 - 7x) / (x^2+1)^7 \\
n=-6 \text{ の場合} \quad & y = (x^6 - 15x^4 + 15x^2 - 1) / (x^2+1)^6 \\
n=-5 \text{ の場合} \quad & y = (x^5 - 10x^3 + 5x) / (x^2+1)^5 \\
n=-4 \text{ の場合} \quad & y = (x^4 - 6x^2 + 1) / (x^2+1)^4 \\
n=-3 \text{ の場合} \quad & y = (x^3 - 3x) / (x^2+1)^3 \\
n=-2 \text{ の場合} \quad & y = (x^2 - 1) / (x^2+1)^2 \\
n=-1 \text{ の場合} \quad & y = x / (x^2+1) \\
n=0 \text{ の場合} \quad & y = 1 \\
n=1 \text{ の場合} \quad & y = x \\
n=2 \text{ の場合} \quad & y = x^2 - 1 \\
n=3 \text{ の場合} \quad & y = x^3 - 3x \\
n=4 \text{ の場合} \quad & y = x^4 - 6x^2 + 1 \\
n=5 \text{ の場合} \quad & y = x^5 - 10x^3 + 5x \\
n=6 \text{ の場合} \quad & y = x^6 - 15x^4 + 15x^2 - 1 \\
n=7 \text{ の場合} \quad & y = x^7 - 21x^5 + 35x^3 - 7x
\end{aligned}$$

・
・

[L(1) 分割微分方程式におけるシンプルな表現の特殊解②]

一般解において、 $c_1=-1$ 、 $c_2=1$ として得られた特殊解を示す。(微分方程式が線形だから全体に掛かる 2 は省いた)

・
・

$$n=-7 \text{ の場合 } y = (7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1) / (x^2+1)^7$$

$$n=-6 \text{ の場合 } y = (6x^5 - 20x^3 + 6x) / (x^2+1)^6$$

$$n=-5 \text{ の場合 } y = (5x^4 - 10x^2 + 1) / (x^2+1)^5$$

$$n=-4 \text{ の場合 } y = (4x^3 - 4x) / (x^2+1)^4$$

$$n=-3 \text{ の場合 } y = (3x^2 - 1) / (x^2+1)^3$$

$$n=-2 \text{ の場合 } y = 2x / (x^2+1)^2$$

$$n=-1 \text{ の場合 } y = 1 / (x^2+1)$$

$$n=0 \text{ の場合 } y = 0$$

$$n=1 \text{ の場合 } y = 1$$

$$n=2 \text{ の場合 } y = 2x$$

$$n=3 \text{ の場合 } y = 3x^2 - 1$$

$$n=4 \text{ の場合 } y = 4x^3 - 4x$$

$$n=5 \text{ の場合 } y = 5x^4 - 10x^2 + 1$$

$$n=6 \text{ の場合 } y = 6x^5 - 20x^3 + 6x$$

$$n=7 \text{ の場合 } y = 7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1$$

・
・

<L(1) 分割微分方程式の解 $L_n(x)$ に対する漸化式>

$$L_{n+2}(x) - 2xL_{n+1}(x) + (x^2+1)L_n(x) = 0 \quad \text{-----} [3]$$

$$(n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$$

上記の微分方程式の解の多項式間に成立する漸化式である。

例えば、 $L_4(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ 、 $L_3(x) = x^3 - 3x$ 、 $L_2(x) = x^2 - 1$ でこの漸化式が成立することを確認いただきたい。

このように 2 種類のシンプルな解①、②が得られた。

これまで長く考察してきたパスカルの三角形型の特殊解（一般解での c_1 ）では項数も多かったが、シンプルな解は項数も少なくすっきりしていて見やすい。

そして、それはチェビシェフ多項式やエルミート多項式などと似た形になったので、今後直交多項式として考察しやすいものになったとも言える。例えばエルミート多項式では $H_0(x) = 1$ 、 $H_1(x) = 2x$ 、 $H_2(x) = 4x^2 - 2$ 、 $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ 、 $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ 、 $\dots$ などとなる。このように x の指数が 2 ずつ増えていく様子が似ている。

漸化式[3]は、パスカル三角形解（一般解の c_1 側特殊解）で成り立つものとしていたが、もう一つのパスカル三角形解（一般解の c_2 側特殊解）でも成り立つと分かった。よってシンプル解①、②でも成り立っている。

$$L_{n+2}(x) - 2xL_{n+1}(x) + (x^2+1)L_n(x) = 0 \quad \text{-----}[3]$$

したがって、一般解でもこの漸化式は成り立つ。
以上。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

●パスカル三角形型の解では、微分したら次数が一つ下の解が得られる。私はそのふしぎに魅了されてきた。
シンプル解でもその性質は引きつがれている。例えば、 $n=7$ の解を微分したら $n=6$ の解が得られる。

$$n=6 \text{ の場合} \quad y=6x^5 - 20x^3 + 6x$$

$$n=7 \text{ の場合} \quad y=7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1$$

このように $n=7$ の解を微分すると $y' = 7(6x^5 - 20x^3 + 6x)$ となって、 $n=6$ の解になる！線形微分方程式なので $7()$ の 7 は省ける。このように $n=k$ の解を微分すると $n=k-1$ の解が得られる。この規則は、 n が負の場合でも成り立っている。

ちなみに、 $\zeta(2)$ 分割微分方程式の解では、このような規則はない。

● $\zeta(2)$ 分割微分方程式に関しては、以下の状態で止まったままである。

一般解はまだ見いだせていない。もう一つの特解解が見つけられていないためである。

$\zeta(2)$ n 分割の微分方程式

$$2x(x-1)y'' - \{(4n-3)x - (4n-2)\}y' + n(2n-1)y = 0 \quad \text{----}①$$

($n=1, 2, 3, \dots$)

または

$$x\sqrt{x-1} \frac{d}{dx} \left\{ x\sqrt{x-1} \frac{d}{dx} (y/x^n) \right\} = -n^2 (y/x^n) \quad \text{----}②$$

①と②は本質的に同じ微分方程式である。

$\zeta(2)$ 1 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^2 - 2 = 0$

$\zeta(2)$ 2 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$

$\zeta(2)$ 3 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$

$\zeta(2)$ 4 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128 = 0$

$\zeta(2)$ 5 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512 = 0$

$\zeta(2)$ 6 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048 = 0$

$\zeta(2)$ 7 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192 = 0$

.

.

n 分身の値を解に持つ固有方程式（代数方程式）の多項式を $Z_n(x)$ とおくと、上記から次となる。

下記の漸化式③は、n が負の値でも成り立つのでその場合の多項式も記した。(その多項式関数は、微分方程式①, ②の解となる)

<多項式 $Z_n(x)$ >

・
・

$$Z_{-7}(x) = (x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192) / x^{14}$$

$$Z_{-6}(x) = (x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048) / x^{12}$$

$$Z_{-5}(x) = (x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512) / x^{10}$$

$$Z_{-4}(x) = (x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128) / x^8$$

$$Z_{-3}(x) = (x^3 - 18x^2 + 48x - 32) / x^6$$

$$Z_{-2}(x) = (x^2 - 8x + 8) / x^4$$

$$Z_{-1}(x) = (x - 2) / x^2$$

$$Z_0(x) = 1$$

$$Z_1(x) = x - 2$$

$$Z_2(x) = x^2 - 8x + 8$$

$$Z_3(x) = x^3 - 18x^2 + 48x - 32$$

$$Z_4(x) = x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128$$

$$Z_5(x) = x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512$$

$$Z_6(x) = x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048$$

$$Z_7(x) = x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192$$

・
・

上記の多項式 $Z_n(x)$ に対する漸化式は、次のようになる。

< (2) 分割固有方程式の多項式 $Z_n(x)$ に対する漸化式 >

$$Z_{n+2}(x) - 2(x-2)Z_{n+1}(x) + x^2Z_n(x) = 0 \quad \text{-----③}$$

$$(n = \cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \cdots)$$

● L(3) の分割微分方程式はまだ得られていない。簡単に出ると思っていたのだが・・

=====

2020. 8. 23 杉岡幹生

<参考文献>

「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳)