＜ゼータの分身が作図可能数となる条件に関して ＞

前回の（その１７０）でわかったことをまとめると、結局、次のようになる。

ゼータの[素数]分割の分身の値が作図可能数となるための必要十分条件は、正[素数]角形が定規とコンパスで作図可能であるための必要十分条件と同じである。

L(1)の２分身も３分身も５分身もπを除いた値は作図可能数となったので、７分身も１１分身もそうなるにちがいないと信じていた私には前回の結果は衝撃の結果となったが、わかってしまうと「ああそうだったのか！」という感じである。７分身も１１分身も作図可能数とはならない。

つまり約２００年前にガウス(1777～1855)とヴァンツェル(1814～1848)によって見出された正多角形を定規とコンパスで作図できるための必要十分条件が、ゼータ分割にもそっくり当てはまるということである。
注記：正ｎ角形のｎは当然３以上となるが、ゼータ２分割でも示してきた通り、2 も作図可能数である。

ゼータ分割という洞窟を手探りで進んできたが、これがわかったおかげで、視界が開けた感がある。

いま Fn をフェルマー数“$2^{2^n}+1$”とすると、その必要十分条件は次となる。

「 フェルマー数 Fn が素数ならば、正 Fn 角形を定規とコンパスで作図することができる。逆に、p を素数として正 p 角形が定規とコンパスで作図できるためには、p がフェルマー数でなければならない。」 ------①

フェルマー(1607～1665)が研究した「$2^{2^n}+1$」という形のフェルマー数 Fn が素数になるかならないかが決定的に大事である。フェルマーは全て素数になるだろうと予想したが、間違っていた。

フェルマー数 Fn が素数か否か？を示すと、以下の通り。

$F_0=2^{2^0}+1=3$ 素数○
$F_1=2^{2^1}+1=5$　素数○
$F_2=2^{2^2}+1=17$ 素数○
$F_3=2^{2^3}+1=257$　素数○
$F_4=2^{2^4}+1=65537$　素数○
$F_5=2^{2^5}+1=4294967297=641\times6700417$　素数でない　×
$F_6=2^{2^6}+1=18446744073709551617=274177\times67280421310721$　素数でない　×
・
・
これ以降ずっと×（素数でない）が続く。
・
・
「数学・まだこんなことがわからない」（吉永良正著）によれば、これまで 89 個の Fn が合成数（素数でない）になることがわかっているようである。本当に上記の５個以外に素数がないのか？未解決問題である。
注意：この書は古い(1996 年版)ので、いまはもっと先が調べられているはず。

さて、p を素数とした場合、L(1)p 分身のπを除いた値が作図可能数（有理数と√ばかりで表現される数）となるか？については、以下の通りである。
なる⇒○、ならない⇒×

○L(1)⇒**２分身**⇒４分身 ⇒ ８分身 ⇒１６分身⇒・・・
○L(1)⇒**３分身**⇒６分身 ⇒１２分身⇒２４分身⇒・・・
○L(1)⇒**５分身**⇒１０分身⇒２０分身⇒４０分身⇒・・・
×L(1)⇒**７分身**⇒１４分身⇒２８分身⇒５６分身⇒・・・
×L(1)⇒**１１分身**⇒２２分身⇒４４分身⇒８８分身⇒・・・
×L(1)⇒**１３分身**⇒２６分身⇒５２分身⇒１０４分身⇒・・・
○L(1)⇒**１７分身**⇒３４分身⇒６８分身⇒１３６分身⇒・・・
×L(1)⇒**１９分身**⇒３８分身⇒７６分身⇒１５２分身⇒・・・
×L(1)⇒**２３分身**⇒４６分身⇒９２分身⇒１８４分身⇒・・・
×L(1)⇒**２９分身**⇒５８分身⇒１１６分身⇒２３２分身⇒・・・
×L(1)⇒**３１分身**⇒６２分身⇒１２４分身⇒２４８分身⇒・・・
・
・　（ずっと×）
・
○L(1)⇒**２５７分身**⇒５１４分身⇒１０２８分身⇒２０５６分身⇒・・・
・
・　（ずっと×）
・
○L(1)⇒**６５５３７分身**⇒１３１０７４分身⇒２６２１４８分身⇒５２４２９６分身⇒・・・
・
・　（ずっと×）　これ以降ずっと×か？
・

注記：正 n 角形の n は当然 3 以上となるが、ゼータ２分割でも示してきた通り、2 も作図可能数である。

こんなふうにｐがフェルマー素数となるところだけｐ分身の値は作図可能数となる。（ちなみに私の計算では７分身の値には $\sqrt[3]{\ }$ が出てくる。）
１７分身が○の作図可能数（有理数と√ばかりで表現される数）となっているのは、正十七角形が定規とコンパスで作図できる（ガウス, 1796 年）こととに関係している。

フェルマー素数 2,3,5 に対応する２分身、３分身、５分身を起点として倍々ゲームで増えていく分身たちも全て作図可能数となることはこれまで示してきた通り。例えば上記の「３分身⇒６分身⇒１２分身⇒２４分身⇒・・」とフラクタル的に分裂していく分身は全て作図可能数となる。
例えば、L(1)の３分身から派生する１２分身の一つを取り上げると、

$$B1 = 1 - 1/47 + 1/49 - 1/95 + 1/97 - 1/143 + \cdots$$
$$= (\pi/48)\tan(23\pi/48)$$
$$= (\pi/48)\left[2+\sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})} + 2\sqrt{\{4+2\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}}\right]$$

などとなり、tan(23π/48)の値は作図可能数となる。このように有理数と√￣（平方根）の重なりで構成された数（作図可能数）になる。$\sqrt[3]{\ }$とか$\sqrt[5]{\ }$とかは出ない！　他の１１個の分身も同様。

　ゼータ分割でも「素数」分割が基本となる。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****

●「マスペディア 1000」（リチャード・エルウィス著、宮本寿代訳、ディスカヴァー・トゥエンティワン）には、ユークリッド原論における、定規とコンパスを用いたいくつかの正多角形の作図方法と平方根の作図方法が示されている。この本の解説はすばらしい。

　ガウスが正十七角形の作図法を発見した様子も記されている。引用しよう。P.66

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　ユークリッドによる正多角形の作図方法は、ほかの多角形にも拡張できる。数学者の手により、正ｎ角形はだいたい作図できるようになった。

（n＝3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64,・・・）

この状況は 2000 年間変わらなかった。これはおおいに不満だった。7 本、9 本、11 本、・・の辺を持つ多角形は作図できないのだろうか？　もしできないのなら、この数列にはどういった意味があるのだろうか？　ただ単に、正しい方法がまだ見つかっていないだけなのだろうか？

　1796 年、カール・フリードリヒ・ガウスが正十七角形の作図が可能だと発表し、数学界に衝撃を与えた。作図可能な多角形についての**フェルマー素数**を用いた分析のなかにその説明があった。

　ガウスは自分の発見に興奮するあまり、自分の墓石にその形を刻んでほしいと求めた。・・・

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　ここは、何度読んでも感動する。

●冒頭での正多角形作図可能性の必要十分条件の①は、次のようにも言い換えられる。前回見たものである。

$$n=2^k\times p\times q\times\cdots\times s$$　（k は任意の自然数。p, q, ・・, s は異なるフェルマー素数。）　−−−−［Ｂ］

n＝3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64,・・

　この［Ｂ］の式で、同じフェルマー素数が複数回出てきてはいけないことに注意（１回きり）。であるから佐藤郁郎氏も述べるように、正５１角形は定規とコンパスで作図できるのに、正５０角形は作図できないことになる。⇒「正多角形（その６）」

　ゼータ分割で倍々ゲームで分裂していく分身も作図可能数となるのは[Ｂ]の条件があるからである。

●前回の（その１７０）で「ゼータｎ分身とそれから派生する分身が作図可能数となるかどうかに関し、L(1)とζ(2)、L(3)、ζ(4)、・・での状態は、ある理由から一致するはず」と書いた。

「ある理由」とは、ゼータ分身の値となっている三角関数の角度が、同じｎ分割（ｎ分身）であればL(1)もζ(2)もL(3)もみんな同じということである。

例えば、L(1)６分身（の一つ）は

A1＝ 1 -1/23 +1/25 -1/47 +1/49 -1/71 +・・ ＝(π/24)tan(11π/24)

ここで、tan(11π/24)＝ 2 +√3 + 2√(2+√3)

ζ(2)と同じZ(2)６分身（の一つ）は

B1 ＝ 1 + $1/23^2$ $+1/25^2$ $+1/47^2$ + $1/49^2$ $+1/71^2$ + ・・ ＝$(\pi/24)^2/\{\cos(11\pi/24)\}^2$

ここで、$1/\{\cos(11\pi/24)\}^2$＝ 8(2 +√3) +4(2+√3)√(2+√3)

L(3) ６分身（の一つ）は

B1 ＝ 1 $-1/23^3$ $+1/25^3$ $-1/47^3$ $+1/49^3$ $-1/71^3$ + ・・＝$(\pi/24)^3\sin(11\pi/24)/\cos^3(11\pi/24)$

ここで、$\sin(11\pi/24)/\cos^3(11\pi/24)$＝ 16(7+4√3) +4√(1554+897√3)

このように同じｎ分身では、角度の部分がいろんなゼータで一致する。ζ(4)、L(5)、ζ(6)、L(7)でも（まだ計算はしていないが）理論的に同じ角度になる。よって、四則演算で閉じた体の性質と三角関数の性質から、L(1)値でπを除いた値が作図可能数なら、他のゼータ値でもπ^mを除いた値は作図可能数になる。

●フェルマー数の次のことに関して。

$F_5=2^{2^5}+1$＝4294967297＝641×6700417 素数でない ×

$F_6=2^{2^6}+1$＝18446744073709551617＝274177×67280421310721 素数でない ×

$2^{2^5}+1$ が合成数であることを示したのはオイラーである。フェルマーの予想の最初の反例。1747 年。

$2^{2^6}+1$ が合成数であることを示したのは８２歳の老数学者ランドリー。1880 年。

「マスペディア 1000」にはオイラーのことは書かれておらず、「1953 年に、J・L・セルフリッジが $2^{2^{16}}+1$ が素数でないことを示し、フェルマーの予想は否定された。」(p.96)と記されている。有名なオイラーの反例が書いてないのはなぜなのだろうか？

****

2020.8.16 杉岡幹生

＜参考文献＞

●「マスペディア 1000」（リチャード・エルウィス著、宮本寿代訳、ディスカヴァー・トゥエンティワン）

●「数学・まだこんなことがわからない」（吉永良正著、講談社ブルーバックス）