＜ ゼータ分身と作図可能数とフェルマー素数の関係 ＞

　ゼータの分身（からπを除いた値）は全て√で表現できる数、つまり作図可能数になるだろうか？
答えはNo である。

　つい先日までYes のはず！と信じていたが、間違っていた。
　正解は「作図可能数となる場合もあるし、ならない場合もある」である。それをフェルマーやガウスの発見した事実を利用しつつ証明したので報告する。

　まず経緯から。（１６８）で私は次のように述べた。

****
●ゼータ（明示的な特殊値）の分身を数値で求めるには、ほとんどのケースで２次方程式を解くだけでよいと分かった。
　そして２４分身も４８分身も・・（労力は要るが）手計算で出せる。そういうことができるのも「１個の分身が２個の分身に割れる（分裂する）」という凄い性質があるからである。

いまは
　L(1)⇒３分身⇒６分身 ⇒１２分身⇒２４分身⇒ ４８分身⇒・・・
で見ているが、上記のことは、
　L(1)⇒２分身⇒４分身 ⇒ ８分身 ⇒１６分身⇒ ３２分身⇒・・・
　L(1)⇒５分身⇒１０分身⇒２０分身⇒４０分身⇒８０分身⇒・・・
でも成り立つ。なぜなら２分身、５分身は既に√で求まっているから。

では、次はどうか？
　L(1)⇒７分身⇒１４分身⇒２８分身⇒５６分身⇒１１２分身⇒・・・
　L(1)⇒１１分身⇒２２分身⇒４４分身⇒８８分身⇒１７６分身⇒・・・
　L(1)⇒１３分身⇒２６分身⇒５２分身⇒１０４分身⇒２０８分身⇒・・・

これは、最初の７分身、１１分身、１３分身が数値で（√で）出せれば、あとはイモずる式に出てくるが、うまくいくか？　たぶんうまくいくのだろうが、研究課題である。
****

　上記は、要するに、２分身とそれから派生する分身（２分身⇒４分身⇒・・）、３分身とそれから派生する分身（３分身⇒６分身⇒・・）、５分身とそれから派生する分身（５分身⇒１０分身⇒・・）は、すべて数値的に√で表現できる数（作図可能数）になるが、そのことは、７分身、１１分身、１３分身の系列でも成り立つはず！と推測したということである。

　「たぶんうまくいく」としたその私の予想は、調べた結果、間違いと分かった。７分身から派生する分身（７分身⇒１４分身⇒・・）は、√のみで表現できる数にはならない。

以下、証明を示すが、その前にL(1)７分身を掲げる。（その１１１）を再掲。

＝＝＝

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+1/13-1/15+\cdots=\pi/4$

■L(1)７分割

$A1=1-1/27+1/29-1/55+1/57-1/83+\cdots=(\pi/28)\tan(13\pi/28)$

$A2=1/3-1/25+1/31-1/53+1/59-1/81+\cdots=(\pi/28)\tan(11\pi/28)$

$A3=1/5-1/23+1/33-1/51+1/61-1/79+\cdots=(\pi/28)\tan(9\pi/28)$

$A4=1/7-1/21+1/35-1/49+1/63-1/77+\cdots=(\pi/28)\tan(7\pi/28)$

$A5=1/9-1/19+1/37-1/47+1/65-1/75+\cdots=(\pi/28)\tan(5\pi/28)$

$A6=1/11-1/17+1/39-1/45+1/67-1/73+\cdots=(\pi/28)\tan(3\pi/28)$

$A7=1/13-1/15+1/41-1/43+1/69-1/71+\cdots=(\pi/28)\tan(\pi/28)$

$A1-A2+A3-A4+A5-A6+A7=L(1)$ である。A1 ,-A2, A3, -A4, A5, -A6, A7 がL(1)７分身である。

＝＝＝

分身たち(A1～A7)の右辺が三角関数の値で表現されていることに注目したい。

なお、作図可能数という名前は、ある特定の正多角形が定規とコンパスで作図できることに由来している。ちなみに、$\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$は作図可能数ではない。なぜなら$\sqrt[3]{\ }$があるから。$\sqrt{2+\sqrt{3}}$はもちろん作図可能数である。なぜなら√しかないから。なお、単なる有理数はもちろん作図可能数である。

では証明を示す。

[証明]

L(1)７分身右辺のうち $\tan(\pi/28)$、$-\tan(3\pi/28)$、$\tan(5\pi/28)$、$\tan(9\pi/28)$、$-\tan(11\pi/28)$、$\tan(13\pi/28)$ の六つは作図可能数でない、すなわち√のみで表現できる数にならない。そのことを、以下、数学史もまじえながら証明する。(分身の-A2, -A4, -A6 を意識して、tan()の前に”-”を付けた)

なお、$-\tan(7\pi/28)$は-1 であり、もちろん作図可能数である。

少し説明しよう。前回のL(1)１２分身では、

$B1=1-1/47+1/49-1/95+1/97-1/143+\cdots$

$=(\pi/48)\tan(23\pi/48)$

$=(\pi/48)[2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}+2\sqrt{\{4+2\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}}]$

などとなり、$\tan(23\pi/48)$の値は√ばかりで構成される数（作図可能数）となった。

じつは「正ｎ角形が定規とコンパスで作図できること」と、「$\alpha=2\pi/n$ とした場合、点$(\cos\alpha、\sin\alpha)$が定規とコンパスで作図できる」ことは同じであることがわかっている。　　　--------[Ａ]

ここで、正ｎ角形のｎと$\alpha=2\pi/n$ のｎが同じであることに注目いただきたい。

正ｎ角形が作図可能であるためには、ｎは次の条件を満たす数であることが必要である。

$$n=2^k\times p\times q\times\cdots\times s$$　（ｋは任意の自然数。ｐ，ｑ，・・，ｓは異なるフェルマー素数。）　----［Ｂ］

この条件はガウス(1777～1855)が予想し、1836 年にヴァンツェル(1814～1848)が証明した。自然数は０を含む。

書いていて気づいたが、ガウスとヴァンツェルは同時代を生きている。日本では江戸時代後期に当たろうか。ちなみにヴァンツェルはかのガロア(1811～1832)とも時代が重なっていて、若くして亡くなっているのも似ている。

条件［Ｂ］にあるフェルマー素数とは次のものである。

フェルマー素数は右の形で表現できる素数：$2^{2^m}+1$　（ｍは０を含む自然数）

フェルマー(1607～1665)は「$2^{2^m}+1$」という形の数を研究し、これらはすべて素数になる！と予想した。たしかに、$3=2^{2^0}+1$、$5=2^{2^1}+1$、$17=2^{2^2}+1$、$257=2^{2^3}+1$、$65537=2^{2^4}+1$ はすべて素数であり、そう予想したのもうなづける。

ところが、1953 年にＪ・Ｌ・セルフリッジが$2^{2^{16}}+1$ が素数でないことを証明したのである！ 結局フェルマーの予想は間違っていたわけである。

ともかく正ｎ角形が定規とコンパスで作図可能であるためには、上記の条件［Ｂ］を満たす必要がある。条件を満たす数を小さい方から順番に並べると、次となる。

ｎ＝3，4，5，6，8，10，12，15，16，17，20，24，30，32，40，48，60，64，・・・

読者は、これらの数が条件［Ｂ］を満たすことを確かめてほしい。

これらの数(n)以外では、正ｎ角形を定規とコンパスで作図することはできない。それは$\alpha=2\pi/n$とした場合に点$(\cos\alpha, \sin\alpha)$が定規とコンパスで作図できないことも意味する。

17 を赤字にしたのには意味がある。ギリシャから 2000 年もの間、

ｎ＝3，4，5，6，8，10，12，15，16，20，24，30，32，40，48，60，64，・・

のｎで正ｎ角形が作図可能であると知られていたが、ガウスがｎ=17 で、つまり正十七角形が作図可能であることを発見し、数学界に衝撃を与えた。ｎ=17 はガウスが埋めたのである。ガウスはその発見に興奮し、自分の墓石に正 17 角形を刻んでほしいと求めたくらいであった。

さて、いよいよゼータの話に移ろう。

＝＝＝

■L(1) ７分割

A1 $=1 -1/27 +1/29 -1/55 +1/57 -1/83 + \cdots =(\pi/28)\tan(13\pi/28)$

A2 $=1/3 -1/25 +1/31 -1/53 +1/59 -1/81 + \cdots =(\pi/28)\tan(11\pi/28)$

A3 $=1/5 -1/23 +1/33 -1/51 +1/61 -1/79 + \cdots =(\pi/28)\tan(9\pi/28)$

A4＝1/7 -1/21 +1/35 -1/49 +1/63 -1/77 +・・ ＝(π/28)tan(7π/28)
A5＝1/9 -1/19 +1/37 -1/47 +1/65 -1/75 +・・ ＝(π/28)tan(5π/28)
A6＝1/11-1/17 +1/39 -1/45 +1/67 -1/73 +・・ ＝(π/28)tan(3π/28)
A7＝1/13-1/15 +1/41 -1/43 +1/69 -1/71 +・・ ＝(π/28)tan(π/28)

A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6+A7＝L(1) である。A1 ,-A2, A3, -A4, A5, -A6, A7 がL(1)７分身である。
＝＝

上の右辺の tan()は、tan(7π/28)以外、すべて作図可能数ではないことを以下に示していく。
繰り返すが、-A4 分身の-tan(7π/28)は、-tan(7π/28)＝-1 と有理数となって当然これは作図可能数である。

まず-A2 分身の-tan(11π/28) と-A6 分身の-tan(3π/28)を調べよう。これらは三角関数の簡単な計算から、
(-tan(11π/28)) +(-tan(3π/28))＝-2/cos(2π/7) ----①
(-tan(11π/28))・(-tan(3π/28))＝1 ----②
を満たす。
解と係数の関係から、-tan(11π/28) と-tan(3π/28)は、次の２次方程式の二解であることもわかる。
x^2 +(2/cos(2π/7))x +1＝0 ----③

さて、①右辺の-2/cos(2π/7)は作図可能数であろうか？

答えは No（ノー）である。なぜなら分母の cos(2π/7)が作図可能数でないから。先に述べた[Ａ]を思い出そう。
「正 n 角形が定規とコンパスで作図できること」と、「α＝2π/n とした場合、点(cosα、sinα)が定規とコンパスで作図できる」ことは同じであることがわかっている。---------[Ａ]

cos(2π/7)は、cosαつまり cos(2π/n)において n=7 に当たる。n=7 は条件[Ｂ]を満たすか？

n＝2^k×p×q×・・×s (k は任意の自然数。p, q, ・・, s は異なるフェルマー素数。) ----[Ｂ]
n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, ・・

この数列に 7 はないので満たさない！ よって、cos(2π/7)は作図可能数でない。

cos(2π/7)が作図可能数でないので、-2/cos(2π/7)も作図可能数ではない。その理由は次の通り。
cos(2π/7)× (-2/cos(2π/7)) ＝-2 ----④
が当然成り立つ。
-2 は有理数だから、④右辺はもちろん作図可能数である。
-2/cos(2π/7)が作図可能数（√ばかりで表現される）であるとすると、④の両辺を-2/cos(2π/7)で割った場合、右辺は作図可能数となる（-2 と√ばかりの数との計算。分母の有理化等で作図可能数になる)。すると、左辺に残った cos(2π/7)が作図可能数となってしまって矛盾が出る。
よって、-2/cos(2π/7)は作図可能数ではない。

$-2/\cos(2\pi/7)$が作図可能数でないと分かったので、①より$-\tan(11\pi/28)$ と$-\tan(3\pi/28)$は少なくともどちらかは作図可能数でない。

その理由は、もし両方とも作図可能数ならば「作図可能数+作図可能数」は作図可能数となって、①の右辺（作図可能数でない）と矛盾するからである。

$$(-\tan(11\pi/28)) + (-\tan(3\pi/28)) = -2/\cos(2\pi/7) \quad ----①$$

$$(-\tan(11\pi/28)) \cdot (-\tan(3\pi/28)) = 1 \quad ----②$$

しかし②から、じつは、$-\tan(11\pi/28)$ と$-\tan(3\pi/28)$はどちらも作図可能数でないとわかってしまう。理由は、もしどちらかが作図可能数ならば矛盾が出るからである（④での議論と同じ）。

よって、$-\tan(11\pi/28)$ と$-\tan(3\pi/28)$はともに作図可能数でないと分かった。

残る$\tan(9\pi/28)$ と$\tan(5\pi/28)$、そして$\tan(13\pi/28)$） と$\tan(\pi/28)$はどうだろうか？

$\tan(9\pi/28)$ と$\tan(5\pi/28)$から調べよう。

三角関数の簡単な計算から、次が成り立つ。

$$\tan(9\pi/28) + \tan(5\pi/28) = 2/\cos(\pi/7) \quad ----⑤$$

$$(\tan(9\pi/28)) \cdot (\tan(5\pi/28)) = 1 \quad ----⑥$$

まず⑤右辺の分母の$\cos(\pi/7)$は、作図可能数ではない。その理由は、$\cos(\pi/7) = \cos(2\pi/14)$であるが、$\cos(2\pi/14)$の 14 という数が、条件［B］の n の数列に含まれていないからである。

n＝3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, ・・

含まれてないですね？

$\cos(\pi/7)$が作図可能数でないと分かったので、先の議論と同様に⑤、⑥から$\tan(9\pi/28)$ と$\tan(5\pi/28)$は、ともに作図可能数ではないと分かる。

なお、２次方程式の解と係数の関係から、$\tan(9\pi/28)$ と$\tan(5\pi/28)$は次の２次方程式の二解であることも分かる。

$$x^2 - (2/\cos(\pi/7))x + 1 = 0 \quad ----⑦$$

では、最後に残った$\tan(13\pi/28)$ と$\tan(\pi/28)$はどうだろうか？

三角関数の簡単な計算から次が成り立つ。

$$\tan(13\pi/28) + \tan(\pi/28) = 2/\cos(3\pi/7) \quad ----⑧$$

$$(\tan(13\pi/28)) \cdot (\tan(\pi/28)) = 1 \quad ----⑨$$

⑧右辺の$\cos(3\pi/7)$は作図可能数ではない。その理由は以下の通り。まず

$$\cos(3\pi/7) = \cos(6\pi/14) = \cos(7\pi/14 - \pi/14) = \cos(\pi/2 - \pi/14) = \sin(\pi/14) = \sin(2\pi/28) \quad ----⑩$$

と変形できる。さらに

$$\sin(2\pi/28) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(2\pi/28)} = \pm\sqrt{1/2 - (\cos(2\pi/14))/2} \quad --------⑪$$

とできる（最後、倍角公式を使用）。

⑪の$\cos(2\pi/14)$の 14 に着目しよう。

14 という数は条件[B]を満たさない（数列に含まれていない）から、$\cos(2\pi/14)$は作図可能数でない。よって、$1/2 - \cos(2\pi/14)/2$ も作図可能数ではなく、結局、$\pm\sqrt{(1/2 - \cos(2\pi/14)/2)}$ も作図可能数でないことが言える。（前者も後者も背理法から簡単に言える）

したがって、⑩と⑪から $\cos(3\pi/7)$は作図可能数でないと分かった。

よって、これまでの議論と同様にして、⑧と⑨から $\tan(13\pi/28)$ と $\tan(\pi/28)$はともに作図可能数でないと分かる。

なお、２次方程式の解と係数の関係から、$\tan(13\pi/28)$ と $\tan(\pi/28)$は次の２次方程式の二解であることもわかる。

$x^2 - (2/\cos(3\pi/7))x + 1 = 0$　　----⑫

以上から、L(1)７分身右辺の $\tan(\pi/28)$、$-\tan(3\pi/28)$、$\tan(5\pi/28)$、$-\tan(7\pi/28)$、$\tan(9\pi/28)$、$-\tan(11\pi/28)$、$\tan(13\pi/28)$については、真ん中の$-\tan(7\pi/28)$だけ作図可能数で、残りの六つはすべて作図可能数ではない（√のみで表現できる数にならない）ことが示された。

以上より、L(1)７分身の値でπを除いた値は、-A4 分身を除いて、作図可能数でないことが証明された。
[証明終わり]

このようにして、L(1)７分身の値に関する「分身は√ばかりで表現できるか？」という問いに決着がついた。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****

●L(1)７分身の $\tan(\pi/28)$、$-\tan(3\pi/28)$、$\tan(5\pi/28)$、$-\tan(7\pi/28)$、$\tan(9\pi/28)$、$-\tan(11\pi/28)$、$\tan(13\pi/28)$を解にもつ７次方程式は、次となる。

$$x^7 - 7x^6 - 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 - 7x + 1 = 0$$

今回求めた２次方程式③、⑦、⑫を考慮すると、上は次のように因数分解される。

$$x^7 - 7x^6 - 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 - 7x + 1$$
$$= (x + 1)\{x^2 - (2/\cos(3\pi/7))x + 1\}\{x^2 + (2/\cos(2\pi/7))x + 1\}\{x^2 - (2/\cos(\pi/7))x + 1\}$$
$$= 0$$

（１６８）の１２分身では１２次方程式になった。そこでは、因数分解された各２次方程式の係数の三角関数が√のみで表現される数（作図可能数）になったから結局、解も√のみで表現される作図可能数になったとも言える。

●作図可能数に関してはだいぶ前に着目していながら、本稿のことになかなか気づけなかった。ゼータ分身はぜんぶ√のみで表現できるはず！という思い込みがあったためである。

その偏見から、７分身の場合どうしても最後３次方程式を解くことになってしまって、おかしい・・と思っていた。３次方程式の解は一般に作図可能数でない。思い込みはいけない・・

●　７分身は分かった。では冒頭で言及した１１分身、１３分身はどうか？作図可能数となるか？

答え⇒「ならない」

どうして？

$n=2^k \times p \times q \times \cdot\cdot \times s$　（k は任意の自然数。p，q，・・，s は異なるフェルマー素数。）　----［B］

n=3，4，5，6，8，10，12，15，16，17，20，24，30，32，40，48，60，64，・・

この数列に 11 と 13 がないから。

●今回のガウスらの結果は「マスペディア 1000」（リチャード・エルウィス著）という事典風の書物を主に参考にした。この本は、数学で重要な 1000 個の定理や事柄をエッセイ風にわかりやすく解説したもので、非常に面白くよく眺めている。

ガウスが発見した正十七角形の作図がいかに重大なものだったか、この書ではじめて認識できた。それは他書にも紹介されているので知ってはいたが、解説がよくないのか、深い意味まで把握できないでいた。この書の明快な解説で、その意味を本当に理解できた。

●フェルマー素数に関するフェルマーの予想は間違っていたことを記した。

「$2^{2^m}+1$」が素数になるのは m が 0～4 まででそれ以上では素数が出てこないと考えられている。「しかし、フェルマー素数がもっとあるかどうかは未解決の問題のままだ。この問題の 1 つの帰結が作図可能な多角形の理論だ。」（マスペディア 1000、P.97）。

ということは、その帰結は、作図可能な多角形のみならず、ゼータ分身が作図可能数となるか？にも関係してくる！！

●これを書いているときに佐藤郁郎氏が正多角形作図に関し、簡潔にわかりやすくまとめられた記事をアップされた。正十七角形の作図、フェルマー素数など。参考になる。

正多角形（その１）、（その２）、（その３）、（その４）、（その５）、（その６）

●ゼータ n 分身とそれから派生する分身が作図可能数となるかどうかに関し、L(1)とζ(2)、L(3)、ζ(4)、・・での状態は、ある理由から一致するはずである。

例えば、L(1)５分身の値（とそこから倍々ゲームで増える分身たち）は作図可能数となるが、それはζ(2)、L(3)、ζ(4)、・・の５分身でも同じはずである。ある理由とは？

●「$2^{2^m}+1$」に関し、m=5 では、「$2^{2^5}+1$」=4294967297=641×6700417 と合成数になった。

m=6 では、「$2^{2^6}+1$」=18446744073709551617=274177×67280421310721 と合成数になった。

急激に大きくなる。CASIO の素因数分解サイトで計算。

****

2020.8.9　杉岡幹生

＜参考文献＞

●「マスペディア 1000」（リチャード・エルウィス著、宮本寿代訳、ディスカバー・トゥエンティワン）

●「数学ガール／ガロア理論」（結城浩著、SB クリエイティブ）

●「作図できる数、できない数」（志甫 淳、東京大学大学院数理科学研究科）