＜ L(3) １７分割 ＞

L(3)の１７分割を求めたので報告したい。（その１６０）の１６分割の続きである。
ただし１７分割は結局は１６分割に還元されてしまうことを最後に述べた。それは（その１６０）の１６分割とはまた異なる１６分割である。

L(3)は、L(s)ゼータのｓに 3 を代入したもので、次のものである。

$L(3)=1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+1/9^3-1/11^3+1/13^3-1/15^3+\cdots=\pi^3/32$ ------①

では、まず結果を示す。以下の通りである。

＝＝

■L(3) １７分割

$A1 = 1-1/67^3+1/69^3-1/135^3+1/137^3-1/203^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(33\pi/68)/\cos^3(33\pi/68)$
$A2 = 1/3^3-1/65^3+1/71^3-1/133^3+1/139^3-1/201^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(31\pi/68)/\cos^3(31\pi/68)$
$A3 = 1/5^3-1/63^3+1/73^3-1/131^3+1/141^3-1/199^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(29\pi/68)/\cos^3(29\pi/68)$
$A4 = 1/7^3-1/61^3+1/75^3-1/129^3+1/143^3-1/197^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(27\pi/68)/\cos^3(27\pi/68)$
$A5 = 1/9^3-1/59^3+1/77^3-1/127^3+1/145^3-1/195^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(25\pi/68)/\cos^3(25\pi/68)$
$A6 = 1/11^3-1/57^3+1/79^3-1/125^3+1/147^3-1/193^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(23\pi/68)/\cos^3(23\pi/68)$
$A7 = 1/13^3-1/55^3+1/81^3-1/123^3+1/149^3-1/191^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(21\pi/68)/\cos^3(21\pi/68)$
$A8 = 1/15^3-1/53^3+1/83^3-1/121^3+1/151^3-1/189^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(19\pi/68)/\cos^3(19\pi/68)$
$A9 = 1/17^3-1/51^3+1/85^3-1/119^3+1/153^3-1/187^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(17\pi/68)/\cos^3(17\pi/68)$
$A10=1/19^3-1/49^3+1/87^3-1/117^3+1/155^3-1/185^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(15\pi/68)/\cos^3(15\pi/68)$
$A11=1/21^3-1/47^3+1/89^3-1/115^3+1/157^3-1/183^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(13\pi/68)/\cos^3(13\pi/68)$
$A12=1/23^3-1/45^3+1/91^3-1/113^3+1/159^3-1/181^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(11\pi/68)/\cos^3(11\pi/68)$
$A13=1/25^3-1/43^3+1/93^3-1/111^3+1/161^3-1/179^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(9\pi/68)/\cos^3(9\pi/68)$
$A14=1/27^3-1/41^3+1/95^3-1/109^3+1/163^3-1/177^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(7\pi/68)/\cos^3(7\pi/68)$
$A15=1/29^3-1/39^3+1/97^3-1/107^3+1/165^3-1/175^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(5\pi/68)/\cos^3(5\pi/68)$
$A16=1/31^3-1/37^3+1/99^3-1/105^3+1/167^3-1/173^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(3\pi/68)/\cos^3(3\pi/68)$
$A17=1/33^3-1/35^3+1/101^3-1/103^3+1/169^3-1/171^3+\cdots=(\pi/68)^3\sin(\pi/68)/\cos^3(\pi/68)$

$A1-A2+A3-A4+A5-A6+A7-A8+A9-A10+A11-A12+A13-A14+A15-A16+A17=L(3)=\pi^3/32$ である。

A1,-A2,A3,-A4,A5,-A6,A7,-A8,A9,-A10,A11,-A12,A13,-A14,A15,-A16,A17 が L(3)の１７分身である。

念のため、上の全式に対し Excel マクロで数値検証したが、左辺級数と右辺値は一致した。
＝＝

導出方法は以下の通りである。

＝＝

[分身の導出方法]

上の分割級数(分身)の導出方法の概要を示す。出発点は次のタンジェント部分分数展開式である。

$1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$

これを２回微分して得られる次式②を使う。

$$1/(1^2-x^2)^3+1/(3^2-x^2)^3+1/(5^2-x^2)^3+\cdots=(\pi^3/64)(1/x^3)\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2)+\mathrm{Others}(x) \quad \text{----②}$$

右辺のOthers(x)はL(3)に関係しない関数なので（じつはζ(2)とL(1)に関係)、”Others(x)”とした。ここでOthers(x)は次のものである。

$\mathrm{Others}(x)=-(3\pi^2/64)(1/x^4)/\cos^2(\pi x/2)+(3\pi/32)(1/x^5)\tan(\pi x/2)$

Others(x)では、じつは、はじめのπ^2の項がζ(2)に関係し、二つ目のπの項がL(1)に関係している。

L(3)は、②の$(\pi^3/64)(1/x^3)\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2)$に関係する。

さて、次のように上記②のxに特定の値を代入することでL(3)の分身が次々に求まっていく。

②のxに{34-(2n-1)}/34を代入すると、Anが得られる。ここでnは1から17の整数。
例えばn=3として②のxに29/34を代入すると、A3が得られる。

（注記）②の左辺級数からL(1)とζ(2)の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺のL(1)とζ(2)の分割級数に対応した値がOthers(x)から出るが、それも無視する。興味がないものは、Others(x)に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単にL(3)の分割級数（分身）を求めることができる。L(5), L(7)・・でも類似的に同様にできる。

＝＝

このように１７分身が求まった。

A9は、じつはL(3)そのものになっている。

それは、$A9=1/17^3(1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+\cdots)$ とできるから容易にわかる。奇数分割の中間（真ん中）の分身は、元ゼータそのものになる。１７分割は結局は１６分割に還元されてしまうのである。。

上記[導出方法]の部分分数展開式は、ゼータの香りの漂う公式と（双方的に）同値関係にある。ゼータの香りの漂う公式は、フーリエ級数から出る。

（その１４)、http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page209.htm

ゼータの源流は、三角関数である。

2020.6.14　杉岡幹生