＜ テイラーシステムでの公式 その２＞

前回、私は「ζ(s)＝L(s)無限和の公式は出せないか？・・」とつぶやいた。じつはよく調べると、2007 年にゼータ＝「L(s)無限和」の公式を出していた。今回はその公式を紹介し、味わってみたい。

その前に前回（その１６３）のゼータ＝「ζ(s)無限和」の公式を復習しよう。再掲する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■ζ(s)式 Cos[s＝s, π/2 代入, πテイラー]

$$
\begin{aligned}
&(1-1/2^{s})(1-1/2^{(s-1)})\zeta(s)\\
&\quad= (1-1/2^{(s-3)})\zeta(s-2)(\pi/2)^2/2! - (1-1/2^{(s-5)})\zeta(s-4)(\pi/2)^4/4!\\
&\qquad + (1-1/2^{(s-7)})\zeta(s-6)(\pi/2)^6/6! - (1-1/2^{(s-9)})\zeta(s-8)(\pi/2)^8/8!\\
&\qquad\quad + (1-1/2^{(s-11)})\zeta(s-10)(\pi/2)^{10}/10! - (1-1/2^{(s-13)})\zeta(s-12)(\pi/12)^{12}/12!\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

■L(s)式 Sin[s＝s, π/2 代入, πテイラー]

$$
\begin{aligned}
L(s) &= (1-1/2^{(s-2)})\zeta(s-1)(\pi/2)^1/1! - (1-1/2^{(s-4)})\zeta(s-3)(\pi/2)^3/3!\\
&\quad + (1-1/2^{(s-6)})\zeta(s-5)(\pi/2)^5/5! - (1-1/2^{(s-8)})\zeta(s-7)(\pi/2)^7/7!\\
&\quad\quad + (1-1/2^{(s-10)})\zeta(s-9)(\pi/2)^9/9! - (1-1/2^{(s-12)})\zeta(s-11)(\pi/2)^{11}/11!\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

注 1: Cos[ ]や Sin[ ]は、本公式を導いた条件である。公式は他の条件でのバリエーションもあるが、上は代表例である。
注 2: 変数の s は実数である。まだ調べていないが、複素数としても成り立つはずである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

この公式の重要性はいくら強調してもしすぎることはない。特長を二つ述べると、次となる。

****

① 任意の実数点でのゼータ値が求まる。

ゼータの値は整数点での値を出すだけでもたいへんなのに、この公式を使うと実数点での値が求まる。

例えば、s に 15/7 を代入したらζ(15/7)、L(15/7)が出るし、s に√2 を代入したらζ(√2)、L(√2)が出る。どんな実数を入力しても値が求まる夢の式になっている。またζ(s)式の s に−1 を代入してζ(−1)＝−1/12 も出る(−1/12 に収束する)。（右辺は関数等式 $\zeta(1-s)=\cos(\pi s/2)\Gamma(s)\cdot 2^{(1-s)}\pi^{(-s)}\zeta(s)$ を用いて書き換えていく）。

これらは$\zeta(s)$=「$\zeta(k)$の無限和」、$L(s)$=「$\zeta(k)$の無限和」となることが容易にわかる。
例えば s=3 の場合、次となる。

$$
\begin{aligned}
&(1-1/2^3)\cdot(1-1/2^2)\zeta(3)\\
&=\pi^2\{\log2/8 - (1-1/2^2)\cdot(1!/4!)\zeta(2)/2^3\\
&\qquad - (1-1/2^4)\cdot(3!/6!)\zeta(4)/2^5 - (1-1/2^6)\cdot(5!/8!)\zeta(6)/2^7\\
&\qquad\quad - (1-1/2^8)\cdot(7!/10!)\zeta(8)/2^9 - (1-1/2^{10})\cdot(9!/12!)\zeta(10)/2^{11}\\
&\qquad\qquad - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}
\end{aligned}
$$

注:計算途上で出る$(1-1/2^0)\zeta(1)$は log2 に置き換える。

②どうして$\zeta(2)$、$\zeta(4)$・・や$L(1)$、$L(3)$・・の明示的な特殊値がきっちり求まるのかの理由がわかる。

$\zeta(2)=\pi^2/6$ ときれいに求まるのは、$\zeta(s)$公式に s=2 を代入したとき、自明な零点 s=−2, −4, −6, −8, ・・の働きで、$\zeta(-2)=\zeta(-4)=\zeta(-6)=\zeta(-8)=\cdots=0$ となり、$\zeta(s)$式の右辺第2項以降が全部ゼロになって第1項のみが残り、

$$(1-1/2^2)\cdot(1-1/2^{(2-1)})\cdot\zeta(2)=(1-1/2^{(2-3)})\cdot\zeta(0)\cdot(\pi/2)^2/2!$$

となるからである。$\zeta(2)=\pi^2/6$ と出る。($\zeta(0)=-1/2$ を用いた)

これは$\zeta(4)$、$\zeta(6)$や $L(1)$、$L(3)$、$L(5)$でもまったく同様である。$\zeta(2)$も一緒に並べる。

$\zeta(2)=\pi^2/6$,　$\zeta(4)=\pi^4/90$,　$\zeta(6)=\pi^6/945$,　$L(1)=\pi/4$,　$L(3)=\pi^3/32$,　$L(5)=5\pi^5/1536$

****

これが二大特長である。ほかに収束が速いとかいろいろ特長はあるが、この二つが特筆すべきものである。

２番目の公式は**$L(s)$=[$\zeta(s)$式]**という形になっていて、$L(s)$を$\zeta(s)$で表すというふしぎなものになっている。以前その種の式をたくさん出しておきながら、その視点はあまり意識したことがなかった・・

さて、今回、2007 年に見出した$\zeta(s)$=「$L(s)$無限和」、$L(s)$=「$L(s)$無限和」の公式を紹介したい。

http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page155.htm　ロニオス彗星その１　一般式
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page156.htm ロニオス彗星その２　一般式ではなく具体例で。本稿の一番下の(注記 1)参照

次のものである。上記 HP から抜粋。二つ目は具体例から一般化した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■L(s)式　Cos-L(s)型[s＝s,　π/2 代入，πテイラー]

$$L(s)=L(s-2)(\pi/2)^2/2!-L(s-4)(\pi/2)^4/4!+L(s-6)(\pi/2)^6/6!-L(s-8)(\pi/2)^8/8!+\cdots$$

■ζ(s)式　Sin-L(s)型[s＝s,　π/2 代入，πテイラー]

$$(1-1/2^s)\zeta(s)$$
$$=L(s-1)(\pi/2)^1/1!-L(s-3)(\pi/2)^3/3!+L(s-5)(\pi/2)^5/5!-L(s-7)(\pi/2)^7/7!+\cdots$$

注 1:　Cos-L(s)型[ ]や Sin-L(s)型[ ]は、本公式を導いた条件である。

注 2:　変数の s は実数である。まだ調べていないが、複素数としても成り立つはずである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　驚くほどシンプルである！

例えば、１番目のＬ(s)式のｓに２、４を代入すると、現代数学でよくわからないとされるＬ(2)、Ｌ(4)が簡単に出る。右辺には関数等式 $L(1-s)=\pi^{(-s)}\cdot 2^s\cdot\Gamma(s)\cdot\sin(\pi s/2)\cdot L(s)$を使う。 なお、L(0)＝1/2 である。

$$L(2)=L(0)(\pi/2)^2/2!$$
$$+(\pi/2)\{(2!/4!)L(3)+(4!/6!)L(5)+(6!/8!)L(7)+(8!/10!)L(9)+\cdots\}$$

$$L(4)=L(2)(\pi/2)^2/2!-L(0)(\pi/2)^4/4!$$
$$-(\pi/2)^3\{(2!/6!)L(3)+(4!/8!)L(5)+(6!/10!)L(7)+(8!/12!)L(9)+\cdots\}$$

またｓに 3, 5 を代入するとＬ(s)の自明な零点 s＝−1, −3, −5, −7, ・・の働きで L(−1)＝L(−3)＝L(−5)＝L(−7)＝・・・＝0 となり、$L(3)=\pi^3/32$,　$L(5)=5\pi^5/1536$ が求まる。

これらの公式も冒頭の２公式とほぼ同じ特長をもつが、当時、私は今回のζ(s)式に関して次のように書いている。http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page155.htm

****

本頁は、テイラーシステムの変形例といえるが、本筋から外れているところではいろいろと特異的なことが起こるようである。

　一般式で下の方ζ(0)、ζ(−1)、ζ(−2)、ζ(−3)、ζ(−4)、・・はどうだろうか？きちんと出るのだろうか？すこし調べると、s=0 では式は成り立つが、ζ(0)の具体的な値は求まらない。

s=−2、−4、−6、・・では式は成り立ち、ζ(−2)＝ζ(−4)＝ζ(−6)＝・・・=0 となりＯＫである。

s=−1、−3、−5、・・では式は成り立たず、ζ(−1)、ζ(−3)、ζ(−5)、・・は求まらないことになる。

　　テイラーシステムの変形例では特異的なことが起こっている。

****

これらの公式は、変形的な条件で導いたので、特異的な面ももっていることを指摘している。これは、L(s)式でもいえそうで、L(s)式に、s=1 を代入しても L(1)が求まらない！（求まりませんね？）
ここでも特異的なことが起こっている。

四つの公式をまとめておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■ζ(s)式 Cos[s＝s, π/2 代入, πテイラー]

$$
\begin{aligned}
&(1-1/2^{s})(1-1/2^{(s-1)})\zeta(s)\\
&\quad = (1-1/2^{(s-3)})\zeta(s-2)(\pi/2)^2/2! - (1-1/2^{(s-5)})\zeta(s-4)(\pi/2)^4/4!\\
&\qquad + (1-1/2^{(s-7)})\zeta(s-6)(\pi/2)^6/6! - (1-1/2^{(s-9)})\zeta(s-8)(\pi/2)^8/8!\\
&\qquad + (1-1/2^{(s-11)})\zeta(s-10)(\pi/2)^{10}/10! - (1-1/2^{(s-13)})\zeta(s-12)(\pi/12)^{12}/12!\\
&\qquad \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

■L(s)式 Sin[s＝s, π/2 代入, πテイラー]

$$
\begin{aligned}
L(s) &= (1-1/2^{(s-2)})\zeta(s-1)(\pi/2)^1/1! - (1-1/2^{(s-4)})\zeta(s-3)(\pi/2)^3/3!\\
&\quad + (1-1/2^{(s-6)})\zeta(s-5)(\pi/2)^5/5! - (1-1/2^{(s-8)})\zeta(s-7)(\pi/2)^7/7!\\
&\quad + (1-1/2^{(s-10)})\zeta(s-9)(\pi/2)^9/9! - (1-1/2^{(s-12)})\zeta(s-11)(\pi/2)^{11}/11!\\
&\quad \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

■L(s)式 Cos-L(s)型[s＝s, π/2 代入, πテイラー]

$$L(s)=L(s-2)(\pi/2)^2/2! - L(s-4)(\pi/2)^4/4! + L(s-6)(\pi/2)^6/6! - L(s-8)(\pi/2)^8/8! + \cdots$$

■ζ(s)式 Sin-L(s)型[s＝s, π/2 代入, πテイラー]

$$
\begin{aligned}
&(1-1/2^{s})\zeta(s)\\
&\quad = L(s-1)(\pi/2)^1/1! - L(s-3)(\pi/2)^3/3! + L(s-5)(\pi/2)^5/5! - L(s-7)(\pi/2)^7/7! + \cdots
\end{aligned}
$$

注 1: Cos[ ], Sin[ ]や Cos-L(s)型[ ], Sin-L(s)型[ ]は、本公式を導いたテイラーシステムでの条件である。
注 2: 変数の s は実数である。まだ調べていないが、複素数としても成り立つはずである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ただただきれいだが、深いものを秘めていることも間違いない。

テイラーシステムは、この他にもさまざまな条件で、別種の公式を次々に出すことができる応用の広い手法である。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●今回のＬ(s)公式で、Ｌ(1)が出ない点について、当時私は次のように述べている。

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

Ｌ(7)、Ｌ(5)、Ｌ(3)と導出してきてＬ(1)だけ導出できないというのは、非常に不思議である。
しかし、本来のテイラーシステムとは違ったテイラーシステム変形例で導出しているので、「その１」同様に、ここでも特異的なことが起こっていると考えられる。

しかし、この特異的なことに着目することで新たに深いことがわかってくるのであろう。

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page156.htm

こう述べたが、いまでもそう思う。美しいことに着目するのは大事だが、異様な点、特異な点に着目することも数学ではまた大事だからである。

● 四公式の二つの式では、Ｌ(s)＝[ξ(s)式]、ξ(s)＝[L(s)式]の形となっている。ξ(s)とＬ(s)がむすびついている。ふしぎな式である。

●上記まとめの四公式での１番目のξ(s)式を見ると、ξ(s)の非自明な零点 $s=1/2+i\alpha_1$ に対し、右辺は $s=-3/2+i\alpha_1$, $s=-7/2+i\alpha_1$, $s=-11/2+i\alpha_1$・・が関係していると気づく。α_1はどこまでも変わらない。３番目のＬ(s)式も同じである。
一方２番目のＬ(s)式を見るとＬ(s)の非自明な零点 $s=1/2+i\alpha_2$ に対し、右辺は $s=-1/2+i\alpha_2$, $s=-5/2+i\alpha_2$, $s=-9/2+i\alpha_2$・・が関係しているとわかる。α_2はどこまでも変わらない。４番目のξ(s)式でも同じである。

これら四公式を眺めることでリーマン予想の背後に潜む、驚くべき構造が透けてみえるかのようである。
ゼータの非自明な零点 $s=1/2+i\alpha$ は、

$-3/2+i\alpha$

$-7/2+i\alpha$

$-11/2+i\alpha$

・・

または

$-1/2+i\alpha$

$-5/2+i\alpha$

$-9/2+i\alpha$

・・

に影響を受けている。これらの点の虚部は、非自明な零点のものと全て同じで、実部のみ変わっていっている。
ξ(s)の自明な零点は負の偶数ｓ＝-2,-4,-6,-8,・・で、Ｌ(s)の自明な零点は負の奇数ｓ＝-1,-3,-5,-7,・・であった。

上の非自明な場合を合わせると、ゼータ値がゼロになるためには、負の実部が効く必要があるのだろう。

●ここまでの公式を使って得られる式は、右辺にπが露わに出る式となる。例えば、まとめ四公式の一番目を使うと、次が出る。

$(1-1/2^3)\cdot(1-1/2^2)\zeta(3)$
$=\pi^2\{\log 2/8 - (1-1/2^2)\cdot(1!/4!)\zeta(2)/2^3$
$- (1-1/2^4)\cdot(3!/6!)\zeta(4)/2^5 - (1-1/2^6)\cdot(5!/8!)\zeta(6)/2^7$
$- (1-1/2^8)\cdot(7!/10!)\zeta(8)/2^9 - (1-1/2^{10})\cdot(9!/12!)\zeta(10)/2^{11}$
$- \cdots\cdots \}$

私はπが見えているのがすこし不満で、πが出ない式は出せないか？と当時模索した。2009 年、（πの出ない）係数が有理数だけの式を導くことに成功した。

$L(2)=(1/4)\{(2/3)^2\cdot(3!/2!)L(4) + (2/3)^4\cdot(5!/4!)L(6) + (2/3)^6\cdot(7!/6!)L(8) + \cdots\}$

$L(4)=(1/240)\{(2/3)^2\cdot(5!/2!)L(6) + (2/3)^4\cdot(7!/4!)L(8) + (2/3)^6\cdot(9!/6!)L(10) + \cdots\}$

微分という一ひねりを加えることで出た。美しい。気に入っている。
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page207.htm
なお、$L(2n)=\Sigma$(有理数係数)$\zeta(2n+1)$の式は「ウェスト彗星　その４」（2007 年に出していた）を参照。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

（注記 1）
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page156.htm に以下の表記ミスがある。
L(-2)＝-2！･(π/2)^3･L(3)
L(-4)＝4！･(π/2)^5･L(5)
L(-6)＝-6！･(π/2)^7･L(7)
L(-8)＝8！･(π/2)^9･L(9)
としているが、
L(-2)＝-2！･(π/2)^(-3)･L(3)
L(-4)＝4！･(π/2)^(-5)･L(5)
L(-6)＝-6！･(π/2)^(-7)･L(7)
L(-8)＝8！･(π/2)^(-9)･L(9)
が正解である。そこだけの書き損じであり、最終結果自体は正しい。

2020.6.6　杉岡幹生