＜ ζ(2)８分身を√で表現 ＞

リーマンゼータζ(s)のζ(2)、つまりZ(2)の８分身を√で表現できたので報告したい。

以前（その１５）で、Z(2)８分身は求めていたが、√での数値的な表現としてはまだ出していなかった。今回それができたので示したい。

Z(2)だが、$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots=\pi^2/8$ である。ζ(2)とは次の関係にあり、両者は本質的に等しいものである。

なお“Z(s)”という記号は私が独自に使っているもので、一般的でないので注意されたい。

$$
\begin{aligned}
Z(2)&=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+1/9^2+1/11^2+\cdots\\
&=1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+1/6^2+1/7^2\cdots-(1/2^2+1/4^2+1/6^2+\cdots)\\
&=\zeta(2)-(1/2^2)\zeta(2)\\
&=(3/4)\zeta(2)=\pi^2/8
\end{aligned}
$$

Z(2)８分身を見る前に、以前求めていたZ(2)４分身の√の表現を見ておこう。（その９９）から引用。

＝＝＝

■Z(2)４分割

$$
\begin{aligned}
B1&=1+1/15^2+1/17^2+1/31^2+1/33^2+1/4^2+\cdots=(\pi/16)^2/\cos^2(7\pi/16)\\
B2&=1/3^2+1/13^2+1/19^2+1/29^2+1/35^2+1/45^2+\cdots=(\pi/16)^2/\cos^2(5\pi/16)\\
B3&=1/5^2+1/11^2+1/21^2+1/27^2+1/37^2+1/43^2+\cdots=(\pi/16)^2/\cos^2(3\pi/16)\\
B4&=1/7^2+1/9^2+1/23^2+1/25^2+1/39^2+1/41^2+\cdots=(\pi/16)^2/\cos^2(\pi/16)
\end{aligned}
$$

$B1+B2+B3+B4=Z(2)=\pi^2/8$ である。これらB1, B2, B3, B4がZ(2)４分身である。

$1/\{\cos()\}^2$の部分を計算した結果は、以下の通り。

$$
\begin{aligned}
1/\cos^2(7\pi/16)&=8+4\sqrt{2}+4\sqrt{(2+\sqrt{2})}+2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}\\
1/\cos^2(5\pi/16)&=8-4\sqrt{2}+4\sqrt{(2-\sqrt{2})}-2\sqrt{(4-2\sqrt{2})}\\
1/\cos^2(3\pi/16)&=8-4\sqrt{2}-4\sqrt{(2-\sqrt{2})}+2\sqrt{(4-2\sqrt{2})}\\
1/\cos^2(\pi/16)&=8+4\sqrt{2}-4\sqrt{(2+\sqrt{2})}-2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}
\end{aligned}
$$

＝＝＝

$(\pi/16)^2$を除いた右辺値は、このように√で表現できた。

さて、今回Z(2)８分身の値を√の形で求めることができたので紹介する。（その１５）では、８分身は三角関数の形では求めていたが、数値的に上記のような√の形では求めていなかった。

今回その形で導出できたので示すと、次のようになった。

＝＝＝

■Z(2)８分割

$C1 = 1 +1/31^2 +1/33^2 +1/63^2 +1/65^2 +1/95^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(15\pi/32)$

$C2 = 1/3^2 +1/29^2 +1/35^2 +1/61^2 +1/67^2 +1/93^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(13\pi/32)$

$C3 = 1/5^2 +1/27^2 +1/37^2 +1/59^2 +1/69^2 +1/91^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(11\pi/32)$

$C4 = 1/7^2 +1/25^2 +1/39^2 +1/57^2 +1/71^2 +1/89^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(9\pi/32)$

$C5 = 1/9^2 + 1/23^2 +1/41^2 +1/55^2 +1/73^2 +1/87^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(7\pi/32)$

$C6 = 1/11^2 +1/21^2 +1/43^2 +1/53^2 +1/75^2 +1/85^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(5\pi/32)$

$C7 = 1/13^2 +1/19^2 +1/45^2 +1/51^2 +1/77^2 +1/83^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(3\pi/32)$

$C8 = 1/15^2 +1/17^2 +1/47^2 +1/49^2 +1/79^2 +1/81^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(\pi/32)$

$C1 +C2 +C3 +C4 +C5 +C6 +C7 +C8 = Z(2) = \pi^2/8$ である。これら C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8 が Z(2)８分身である。

$1/\{\cos()\}^2$ の部分を計算した結果は、以下の通り。

$1/\cos^2(15\pi/32) = (2+\sqrt{2})\{8 +4\sqrt{2+\sqrt{2}} +4\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} +2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(13\pi/32) = (2-\sqrt{2})\{8 +4\sqrt{2-\sqrt{2}} +4\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}} +2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(11\pi/32) = (2-\sqrt{2})\{8 -4\sqrt{2-\sqrt{2}} +4\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}} -2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(9\pi/32) = (2+\sqrt{2})\{8 -4\sqrt{2+\sqrt{2}} +4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} -2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(7\pi/32) = (2+\sqrt{2})\{8 -4\sqrt{2+\sqrt{2}} -4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} +2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(5\pi/32) = (2-\sqrt{2})\{8 -4\sqrt{2-\sqrt{2}} -4\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}} +2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(3\pi/32) = (2-\sqrt{2})\{8 +4\sqrt{2-\sqrt{2}} -4\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}} -2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(\pi/32) = (2+\sqrt{2})\{8 +4\sqrt{2+\sqrt{2}} -4\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} -2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\}$

＝＝＝

このように√での表現が求まった。

これは手計算で求めたわけだが、計算は入れ子構造になっていて割合に簡単に求めることができた。それは、三角関数のコサインの倍角公式を入れ子構造で３回繰り返すだけである。

人形の中に相似の人形が隠れており、その中にさらに人形が隠れている、というロシアのマトリョーシカ人形のようになっている。

この結果を示したのは、ゼータ分割では、三乗根$\sqrt[3]{\ }$や五乗根$\sqrt[5]{\ }$とかそんなものは出ず、平方根√しか出ないことを強調したいからである。

４分身でも√しか出ていない。８分身でも√しか出ない。２分身でももちろんそうである。他の分身でも、すべてそうなっているはずである。それは$\zeta(2)$のみならず、L(1)でもそうなっている。

そのことは、ゼータの分身たちは２次方程式の解になっているということを意味する。

ｎ分身では、ｎ次多項式からなるｎ次代数方程式を解くわけだが、その多項式は、ある体（√が添加された体）上での２次多項式に因数分解される。その２次多項式に対応する２次方程式の解の公式に√があるから√が出てくる。

さらに別の表現をすれば、「√で表現可能」ということは、定規とコンパスで作図できる作図可能数である！ということを意味している。

8 +4√2 + 4√(2+√2) +2√(4+2√2)
とか
(2+√2){8 +4√(2+√2) +4√(2+√(2+√2)) +2√(2+√2)√(2+√(2+√2))}
とか、こんなのは、みんな定規とコンパスで作図可能な数なのである。

この辺は以前も述べたようにギリシャの三大作図問題とも関係する。（その１４９）、（その152）

ゼータの分身の値は「単純できれい」といえると思う。

課題の整理の意味から、備忘録もかねて、予想、構想、妄想、つぶやきを書いておく。

****
●ζ(2)8分身の√表現のほうが、L(1)8分身のそれよりはるかに簡単に求まる。
前者はコサインの倍角公式、後者はタンジェントの倍角公式が関係。
ζ(2)8分身は2次方程式$\alpha=2x^2-1$を、L(1)8分身は2次方程式$\beta x^2+2x-\beta=0$を繰り返し解くことになる。
どちらも、単調な相似的な操作の繰り返しだが、前者の方がずっと簡単である。

●上のことから、ζ(2)16分身やζ(2)32分身も簡単に求まる。

● 8分身に関しては、まだ基底は得られていない。L(1)もζ(2)もまだ。
L(1)の4分身、6分身では求めた。(その152)、(その153)。L(1)6分身では、2次元ベクトル空間と4次元ベクトル空間の二つに分かれた。つまり、体の世界が二つできた（最小多項式が二つ）。
L(1)、ζ(2)の8分身は、二つの4次元ベクトル空間に分かれるのか？たぶん、そうなるだろう。

●「‥どのような有理数も作図可能であることがわかっている。でも、これですべてではない。平方根をとるのもまた作図可能な手続きだ。
ピエール・ヴァンツェルは、私たちにできるのはこれですべてであることを証明した。作図可能な数は、有理数の足し算、引き算、掛け算、割り算をしたり、平方根をとったりして得られる数に限られる。またそのことからわかるように、作図可能な数は体をなす。
作図可能な数はすべて代数的だ。すなわち、πのような超越数は作図可能ではない。しかし、代数的数が必ずしもすべて作図可能なわけではない。たとえば、$\sqrt[3]{2}$は作図可能ではない。（$\sqrt[4]{2}$は$\sqrt{\sqrt{2}}$に等しいことから作図可能

だ）。この洞察から、ヴァンツェルは何千年も未解決のままだった問題のいくつか（角の３等分や立方体の２倍など）に対する解答を見出した。・・・」

マスペディア 1000（リチャード・エルウィス著）p.70 から。

●ヴァンツェルは、ワンツェルと書いてある本もある。後者は英語読みなので、どちらでもよいだろうが、ヴァンツェルが多いようだ。ヴァンツェルは、いくつも決定的な結果を残したのに、あまり知られていない感じがする。同時代のガロアばかりがもてはやされるのは不公平な気もする。ガロアが未整理の？群論を残した功績は大だが、決闘死というドラマチックな話が影響していると思う。

****

2020.5.24　杉岡幹生

（参考文献）マスペディア 1000（リチャード・エルウィス著、宮本寿代訳、ディスカヴァー・トゥエンティワン）