

< L(3) 15分割 >

今回は、元の本道に戻ってL(3)の15分割を求めたので報告したい。昨秋からのL(3)分割シリーズの続きである。

ただし15分割は結局は14分割となってしまうことを最後に述べた。それは(その154)の14分割とはまた異なる14分割である。

L(3)は、L(s)ゼータのsに3を代入したもので、次のものである。

$$L(3) = 1 - 1/3^3 + 1/5^3 - 1/7^3 + 1/9^3 - 1/11^3 + 1/13^3 - 1/15^3 + \dots = \pi^3/32 \quad \text{-----①}$$

では、まず結果を示す。以下の通りである。

=====

■L(3) 15分割

$$\begin{aligned}
 A1 &= 1 - 1/59^3 + 1/61^3 - 1/119^3 + 1/121^3 - 1/179^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(29\pi/60) / \cos^3(29\pi/60) \\
 A2 &= 1/3^3 - 1/57^3 + 1/63^3 - 1/117^3 + 1/123^3 - 1/177^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(27\pi/60) / \cos^3(27\pi/60) \\
 A3 &= 1/5^3 - 1/55^3 + 1/65^3 - 1/115^3 + 1/125^3 - 1/175^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(25\pi/60) / \cos^3(25\pi/60) \\
 A4 &= 1/7^3 - 1/53^3 + 1/67^3 - 1/113^3 + 1/127^3 - 1/173^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(23\pi/60) / \cos^3(23\pi/60) \\
 A5 &= 1/9^3 - 1/51^3 + 1/69^3 - 1/111^3 + 1/129^3 - 1/171^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(21\pi/60) / \cos^3(21\pi/60) \\
 A6 &= 1/11^3 - 1/49^3 + 1/71^3 - 1/109^3 + 1/131^3 - 1/169^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(19\pi/60) / \cos^3(19\pi/60) \\
 A7 &= 1/13^3 - 1/47^3 + 1/73^3 - 1/107^3 + 1/133^3 - 1/167^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(17\pi/60) / \cos^3(17\pi/60) \\
 A8 &= 1/15^3 - 1/45^3 + 1/75^3 - 1/105^3 + 1/135^3 - 1/165^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(15\pi/60) / \cos^3(15\pi/60) \\
 A9 &= 1/17^3 - 1/43^3 + 1/77^3 - 1/103^3 + 1/137^3 - 1/163^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(13\pi/60) / \cos^3(13\pi/60) \\
 A10 &= 1/19^3 - 1/41^3 + 1/79^3 - 1/101^3 + 1/139^3 - 1/161^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(11\pi/60) / \cos^3(11\pi/60) \\
 A11 &= 1/21^3 - 1/39^3 + 1/81^3 - 1/99^3 + 1/141^3 - 1/159^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(9\pi/60) / \cos^3(9\pi/60) \\
 A12 &= 1/23^3 - 1/37^3 + 1/83^3 - 1/97^3 + 1/143^3 - 1/157^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(7\pi/60) / \cos^3(7\pi/60) \\
 A13 &= 1/25^3 - 1/35^3 + 1/85^3 - 1/95^3 + 1/145^3 - 1/155^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(5\pi/60) / \cos^3(5\pi/60) \\
 A14 &= 1/27^3 - 1/33^3 + 1/87^3 - 1/93^3 + 1/147^3 - 1/153^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(3\pi/60) / \cos^3(3\pi/60) \\
 A15 &= 1/29^3 - 1/31^3 + 1/89^3 - 1/91^3 + 1/149^3 - 1/151^3 + \dots = (\pi/60)^3 \sin(\pi/60) / \cos^3(\pi/60)
 \end{aligned}$$

$$A1 - A2 + A3 - A4 + A5 - A6 + A7 - A8 + A9 - A10 + A11 - A12 + A13 - A14 + A15 = L(3) = \pi^3/32 \text{ である。}$$

A1, -A2, A3, -A4, A5, -A6, A7, -A8, A9, -A10, A11, -A12, A13, -A14, A15 がL(3)の15分身である。

念のため、上の全式に対しExcelマクロで数値検証したが、左辺級数と右辺値は一致した。

=====

導出方法は以下の通りである。

=====

[分身の導出方法]

上の分割級数(分身)の導出方法の概要を示す。出発点は次のタンジェント部分分数展開式である。

$$1/(1^2-x^2) + 1/(3^2-x^2) + 1/(5^2-x^2) + \dots = (\pi/(4x)) \tan(\pi x/2)$$

これを2回微分して得られる次式②を使う。

$$1/(1^2-x^2)^3 + 1/(3^2-x^2)^3 + 1/(5^2-x^2)^3 + \dots = (\pi^3/64) (1/x^3) \sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2) + \text{Others}(x) \text{ ----} \textcircled{2}$$

右辺の Others(x) は L(3) に関係しない関数なので (じつは L(2) と L(1) に関係)、"Others(x)" とした。ここで Others(x) は次のものである。

$$\text{Others}(x) = -(3\pi^2/64) (1/x^4)/\cos^2(\pi x/2) + (3\pi/32) (1/x^5) \tan(\pi x/2)$$

じつは、はじめの π^2 の項が L(2) に関係し、二つ目の π の項が L(1) に関係している。

さて、次のように上記②の x に特定の値を代入することで L(3) の分身が次々に求まっていく。

②の x に $\{30-(2n-1)\}/30$ を代入すると、 A_n が得られる。ここで n は 1 から 15 の整数。

例えば n=3 として②の x に 25/30 を代入すると、 A_3 が得られる。

(注記) ②の左辺級数から L(1) と L(2) の分割級数(分身)が出るが、それは興味がないので無視する。右辺からも左辺の L(1) と L(2) の分割級数に対応した値が Others(x) から出るが、それも無視する。興味がないものは、Others(x) に押し込んで無視するのである。この方法を使うことで計算量を劇的に減らすことができ、割合簡単に L(3) の分割級数(分身)を求めることができる。L(5), L(7)・・・でも類似的に同様にできる。

=====

このように 15 分身が求まった。素晴らしくよい眺めである。

まだ全ケースで見ているわけではないが、これら分身たちの右辺値が、すべて $\sqrt{\quad}$ で (平方根で) 表現されることはほぼ明らかである。それは、ある拡大体上で、これらの分身を解にもつ代数方程式を 2次方程式にまで 因数分解できることを意味する。

例えば (その134) で示したように 4 分割の 4 分身では、 $\sqrt{\quad}$ できれいな形で表現される。それは、L(1) の類似となっているともいえるだろう。(その150)、(その151)

A_8 は、じつは L(3) そのもの になっている。

それは、 $A_8 = 1/15^3 (1 - 1/3^3 + 1/5^3 - 1/7^3 + \dots)$ とできるから容易にわかる。奇数分割の中間 (真ん中) の分身は、元ゼータそのものになる。よって 15 分割は結局は 14 分割となる。

L(3) 15 分身は、以前に示した L(1) 15 分身と 形が全く同じ であることにも注目したい。(その75) の LC(1) 12 分割での L(1) 15 分割の姿を見ていただきたい。

L(1) から L(3) に移っても全く秩序が壊れないという 保存性のよさ を味わっていただきたい。

これらゼータ関数の“よい性質”は、すべて三角関数のよい性質から発している。

上記[導出方法]の部分分数展開式は、ゼータの香りの漂う公式と（双方的に）同値関係にある。ゼータの香りの漂う公式は、フーリエ級数から出る。

(その14)、http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page209.htm

ゼータ関数は三角関数から湧き出ており、その素晴らしい対称性や秩序は、三角関数の性質を反映したものにすぎない。

ゼータは、三角関数の子供である、と言えそうだ。

2020.5.9 杉岡幹生