

< ζ(2)分割固有方程式の多項式を生む漸化式 >

L(1)に続いて、ζ(2)分割の固有方程式の多項式を生み出す漸化式を見出したので紹介したい。

その漸化式は、以前発見した、ζ(2)分割固有方程式の多項式を特殊解(特解)として持つ微分方程式とも関連する可能性があるため、固有方程式とともにまず微分方程式を示しておく。

(その120)から抜粋(若干編集した)。

ζ(2) n分割の微分方程式

$$2x(x-1)y'' - \{(4n-3)x - (4n-2)\}y' + n(2n-1)y = 0 \quad \text{----①}$$

(n=1, 2, 3, ...)

または

$$x\sqrt{x-1} \frac{d}{dx} \left\{ x\sqrt{x-1} \frac{d}{dx} (y/x^n) \right\} = -n^2 (y/x^n) \quad \text{----②}$$

①と②は本質的に同じ微分方程式である。

①と②は以下のζ(2) n分身の値を解に持つ固有方程式でのy=左辺多項式を解にもつ。例えば、ζ(2) 3分身の場合、n=3とした①または②は、 $y=x^3 - 18x^2 + 48x - 32$ を特殊解に持つ。

ζ(2) 1分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x - 2 = 0$

ζ(2) 2分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^2 - 8x + 8 = 0$

ζ(2) 3分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$

ζ(2) 4分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128 = 0$

ζ(2) 5分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512 = 0$

ζ(2) 6分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048 = 0$

ζ(2) 7分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192 = 0$

・
・

この微分方程式が超幾何微分方程式の一種となっていることは(その120)で見た通りである。

さて、n分身の値を解に持つ固有方程式(代数方程式)の多項式を $Z_n(x)$ とおくと、上記を参考にして、次のようになる。

=====

< ζ(2)分割固有方程式の多項式 $Z_n(x)$ >

$$Z_1(x) = x - 2$$

$$Z_2(x) = x^2 - 8x + 8$$

$$Z_3(x) = x^3 - 18x^2 + 48x - 32$$

$$Z_4(x) = x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128$$

$$Z_5(x) = x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512$$

$$Z_6(x) = x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048$$

$$Z_7(x) = x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192$$

・
・

=====

この多項式が第一種チェビシェフ多項式と密接に関係していることは、これまで見てきた通りである。

どのように関係しているかという、第一種チェビシェフ多項式での $2n$ 項番目（偶数番目）の多項式 $T_{2n}(x)$ の x^2 を $1/t$ に置き換え、その式全体に $(-t)^n$ を掛ければ $Z_n(t)$ が得られるという具合である。こんな形でチェビシェフとつながっている。

チェビシェフ多項式、ラゲール多項式、エルミート多項式、ルジャンドル多項式などの有名多項式には、すべて母関数が存在する。と (2) の多項式 $Z_n(x)$ でもその母関数があるはずだが、難しい課題であるので、それを求めるのは後回しにしたい。

マグロウヒルの公式集には母関数とともに漸化式も示されている。多項式 $Z_n(x)$ の漸化式は、 $L(1)$ の多項式 $L_n(x)$ の漸化式をヒントにして試行錯誤で発見した。それは次の③となる。

<と (2) 分割固有方程式の多項式 $Z_n(x)$ に対する漸化式>

$$Z_{n+2}(x) - 2(x-2)Z_{n+1}(x) + x^2Z_n(x) = 0 \quad \text{-----③}$$
$$(n=1, 2, 3 \dots)$$

このように求まった。どのようにして③を得たかであるが、今回はシステマティックには求めていない。

今回は、 $L(1)$ 漸化式の形からヒントを得て、 $Z_{n+2}(x) + (ax+b)Z_{n+1}(x) + (cx^2+dx+e)Z_n(x) = 0$ となっているに違いないと予想し、冒頭の具体的な式 $Z_2(x), Z_3(x), Z_4(x)$ を使って a, b, c, d, e の値を求め、③にたどり着いた。そして他の具体例でその正しさを確認したということである。

注記： $L(1)$ で使ったような「固有方程式を 1 回微分すれば次数の一つ低い固有方程式が得られる」というようなきれいな規則が、と (2) 固有方程式に見えないため、上記のようにした。

漸化式が得られたので、 $L(1)$ と同様、と (2) でも低次の場合から高次式を次々と機械的に求めることができるようになった。

最後に、と (2) の場合と $L(1)$ の場合で、それぞれの固有方程式（多項式）、微分方程式、漸化式をまとめておく。

[ζ (2) の場合]

ζ (2) n 分割の微分方程式

$$2x(x-1)y'' - \{(4n-3)x - (4n-2)\}y' + n(2n-1)y = 0 \quad \text{----①}$$

(n=1, 2, 3, \dots)

または

$$x\sqrt{x-1} \frac{d}{dx} \left\{ x\sqrt{x-1} \frac{d}{dx} (y/x^n) \right\} = -n^2 (y/x^n) \quad \text{----②}$$

①と②は本質的に同じ微分方程式である。

①と②は以下の ζ (2) n 分身の値を解に持つ固有方程式での $y =$ 左辺多項式を解にもつ。例えば、ζ (2) 3 分身の場合、 $n=3$ とした①または②は、 $y = x^3 - 18x^2 + 48x - 32$ を特殊解に持つ。

ζ (2) 1 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x - 2 = 0$

ζ (2) 2 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$

ζ (2) 3 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^3 - 18x^2 + 48x - 32 = 0$

ζ (2) 4 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128 = 0$

ζ (2) 5 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512 = 0$

ζ (2) 6 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048 = 0$

ζ (2) 7 分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192 = 0$

・
・

n 分身の値を解に持つ固有方程式 (代数方程式) の多項式を $Z_n(x)$ とおくと、上記から次となる。

< ζ (2) 分割固有方程式の多項式 $Z_n(x)$ >

$$Z_1(x) = x - 2$$

$$Z_2(x) = x^2 - 8x + 8$$

$$Z_3(x) = x^3 - 18x^2 + 48x - 32$$

$$Z_4(x) = x^4 - 32x^3 + 160x^2 - 256x + 128$$

$$Z_5(x) = x^5 - 50x^4 + 400x^3 - 1120x^2 + 1280x - 512$$

$$Z_6(x) = x^6 - 72x^5 + 840x^4 - 3584x^3 + 6912x^2 - 6144x + 2048$$

$$Z_7(x) = x^7 - 98x^6 + 1568x^5 - 9408x^4 + 26880x^3 - 39424x^2 + 28672x - 8192$$

・
・

上記の多項式 $Z_n(x)$ に対する漸化式は、次のようになる。

< ζ (2) 分割固有方程式の多項式 $Z_n(x)$ に対する漸化式 >

$$Z_{n+2}(x) - 2(x-2)Z_{n+1}(x) + x^2Z_n(x) = 0 \quad \text{-----③}$$

(n=1, 2, 3, \dots)

[L(1)の場合]

L(1) n分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \quad \text{-----}[1]$$

(n=1, 2, 3, \dots)

または

$$(x^2+1)^n \frac{d}{dx} \left\{ (x^2+1)^{1-n} \frac{dy}{dx} \right\} = n(1-n)y \quad \text{-----}[2]$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

[1]と[2]は以下のL(1) n分身の値を解に持つ固有方程式でのy=左辺多項式を解にもつ。例えばL(1) 3分身の場合、n=3とした[1]と[2]は、 $y=x^3-3x^2-3x+1$ を特殊解に持つ。

L(1) 1分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x-1=0$

L(1) 2分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^2-2x-1=0$

L(1) 3分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^3-3x^2-3x+1=0$

L(1) 4分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0$

L(1) 5分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0$

L(1) 6分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-6x-1=0$

L(1) 7分身の値を解に持つ固有方程式 $\Rightarrow x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1=0$

・
・

n分身の値を解に持つ固有方程式（代数方程式）の多項式を $L_n(x)$ とおくと、上記から次となる。

< L(1)分割固有方程式の多項式 $L_n(x)$ >

$$L_1(x) = x - 1$$

$$L_2(x) = x^2 - 2x - 1$$

$$L_3(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

$$L_4(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1$$

$$L_5(x) = x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1$$

$$L_6(x) = x^6 - 6x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 - 6x - 1$$

$$L_7(x) = x^7 - 7x^6 - 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 - 7x + 1$$

・
・

上記の多項式 $L_n(x)$ に対する漸化式は、次のようになる。

<L(1)分割固有方程式の多項式 $L_n(x)$ に対する漸化式>

$$L_{n+2}(x) - 2xL_{n+1}(x) + (x^2+1)L_n(x) = 0 \quad \text{-----}[3]$$

(n=1, 2, 3, \dots)

<参考文献>

「マグローヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳)